УДК 51-37+519.61 **Физико – математические науки**

Айдагулов Рустем Римович, *кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник кафедры теоретической информатики механико-математического факультета*
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Институт машиноведения РАН им. А. А. Благонравова, Россия, г. Москва

РАВНОМЕРНОСТЬ

Аннотация: Многие задачи аналитической теории чисел сводятся к равномерности распределения той или иной последовательности чисел или, в частности, дробных долей некоторой функции $f(x)$ при целых значениях аргумента. При равномерности распределения количества значений последовательности в определенном интервале, находятся через интеграл плотности распределения с точностью до $O(N^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$. При этом значения имеют характер случайной величины, несмотря на то, что они могут быть получены согласно простому закону. Далее уточняется это понятие. К теории равномерности приводят и многие прикладные задачи. Сама теория вероятности может быть сформулирована в терминах равномерности. Энтропия, встречаемая как в информатике, так и в физике, так же может интерпретироваться как мера отклонения от равномерности распределения в фазовом пространстве.

Ключевые слова: равномерность, тригонометрические суммы, g-суммы.

Abstract: Many problems of analytical number theory are reduced to the uniformity of the distribution of a sequence of numbers or, in particular, fractional fractions of a function $f(x)$ for integer values of the argument. With their uniform distribution of the number of sequence values in a certain interval, they are found

through the integral of the distribution density with an accuracy of $O(N^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$. In this case, the values have the character of a random variable, despite the fact that they can be obtained according to a simple law. Further this concept is specified. Many applied problems also lead to the theory of uniformity. The probability theory itself can be formulated in terms of uniformity. Entropy, found in both computer science and physics, can also be interpreted as a measure of deviation from the uniformity of distribution in phase space.

Key words: uniformity, trigonometric sums, g-sums.

Равномерность последовательности.

Понятие равномерности последовательности x_n подразумевает, что количество членов $x_n, n = 1,2,\dots,N$ попавших в интервал $[A,B) - \pi(A,B,N)$ растет пропорционально длине интервала $B - A$. Естественно, что в таком случае последовательность должна быть ограниченной. Часто под такой последовательностью выступает последовательность $x_n = \{f(n)\}$ дробных долей некоторой функций, все члены которой принадлежат интервалу [0, 1). В таком случае достаточно исследовать на пропорциональность количества членов в интервале $[0,\alpha), \alpha \in (0,1)$ длине интервала. Пусть $\pi(\alpha, N)$ означает количество членов последовательности $x_n, n = 1,2,\dots,N$, принадлежащих интервалу $[0,\alpha)$. Такие последовательности (в частности, для дробных долей функции) назовем равномерными, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $C(\varepsilon) > 0$, что для любого $\alpha \in (0,1)$ выполняется:

$$\pi(\alpha, N) = \alpha N + R, |R| < C(\varepsilon) N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}. \qquad (1)$$

Равномерность по Вейлю определяется менее строго, а именно $|R| = o(N)$. Как будет видно ниже, более строгое определение является типичным. Еще более строгим является пропорциональность количества членов длине интервала (α,β) и для малых интервалов, когда остаточный член оценивается как $|R| < C(\varepsilon)((\beta-\alpha)N)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ для длин вплоть до $(\beta-\alpha)N = O(N^{\varepsilon})$. Из определения видно, что понятие равномерности инвариантно относительно сдвига, т.е. относительно замены последовательности x_nна $y_n = \{x_n + c\}$. Равномерность сохранится и при масштабировании, т.е. при замене x_n на $y_n = \{qx_n\}, q \in Z$.

Действительно,

$$\pi(\alpha, N, y_n) = \sum_{i-0}^{q-1} (\pi\left(\frac{i+\alpha}{q}, N, x_n\right) - \pi\left(\frac{i}{q}, N, x_n\right)) = \alpha N + O\left(N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right).$$

Типичным примером на исследование равномерности является последовательность дробных долей линейной функции $x_n = \{f(n)\}, f(n) = ax + b$. Если наклон функции $a = \frac{P}{Q}$ рациональное число, последовательность x_n периодическая с периодом Q. Любая периодическая последовательность с периодом Q обладает пробелами в значениях длины $\frac{1}{Q}$, соответственно для некоторых α отклонение R в (1) не меньше $\left[\frac{N}{Q}\right]$, т.е. последовательность не является равномерной даже по Вейлю. В случае иррациональности наклона a задача на равномерность сводится к исследованию неполных частных q_k в разложении на непрерывную дробь:

$$a = P_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cdots}}} = P_0 + \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{Q_k Q_{k+1}} = \frac{P_l}{Q_l} + \sum_{k \geq l} \frac{(-1)^k}{Q_k Q_{k+1}} \qquad (2)$$

Здесь P_0 может быть и отрицательным целым. Так как добавление целого числа к наклону ничего не меняет, можем считать, что $0 < a < 1,\ P_0 = 0$. По неполным частным q_i строятся подходящие дроби по рекурентной формуле:

$$P_0 = 0, Q_0 = 1, P_1 = 1, Q_1 = q_1, P_{k+1} = q_{k+1}P_k + P_{k-1}, Q_{k+1} = q_{k+1}Q_k + Q_{k-1}.$$

В этом случае последовательность x_n почти периодичная с почти периодами Q_k. Отклонение от рационального в (2) не превосходит $\left|a - \frac{P_l}{Q_l}\right| < \frac{1}{Q_l^2}$, точнее выполняется следующее:

$$\frac{P_0}{Q_0} < \frac{P_2}{Q_2} < \frac{P_4}{Q_4} < \cdots < \frac{P_{2k}}{Q_{2k}} < a < \frac{P_{2k+1}}{Q_{2k+1}} < \cdots < \frac{P_3}{Q_3} < \frac{P_1}{Q_1},$$

Соответственно

$$\left|a - \frac{P_k}{Q_k}\right| < (-1)^k \left(\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} - \frac{P_k}{Q_k}\right) = \frac{1}{Q_k Q_{k+1}}.$$

Легко показать, что в случае, когда общее количество точек $N = Q_k$ равно почти периоду, то

$$|\pi(\alpha, Q_k) - \alpha Q_k| < 1. \qquad (3)$$

Пусть $Q_k < N < Q_{k+1}$. Представим N в виде:

$$N = n_k Q_k + n_{k-1} Q_{k-1} + \cdots + n_0 Q_0,$$

где вначале выделяетсся$n_k = \left[\frac{N}{Q_k}\right]$, из оставшегося количества определяется $n_{k-1} = \left[\frac{N - n_k Q_k}{Q_{k-1}}\right]$ и т.д. При этом $n_l \leq q_{l+1}$. Из (3) получается, что отклонение от равномерности в (1) не превосходит величины $n_0 + n_1 + \cdots + n_k$. После $n_i = \frac{q_i+1}{2}$ ошибка убывает, поэтому верна оценка поточнее:

$$|R| < \sum_{i=1}^{k+1} \frac{q_i + 1}{2}.$$

Для иррациональных a за исключением меры 0 этот остаток оценивается $O(\ln(N)^{1+\varepsilon})$.

Тем не менее, имеются множество Лиувиллевых чисел, у которых появляются неполные частные q_i существенно больше Q_{i-1}. Для них не выполняется равномерность в указанном смысле. Однако равномерность по Вейлю имеет место для любого иррационального наклона.

Одно из основных свойств равномерных последовательностей является их случайный характер и возможность их использования в интегрировании по методу Монте-Карло. Пусть функция $\psi(x)$ периодическая с периодом 1. Тогда $\psi\big(f(x)\big) = \psi(\{f(x)\})$. Нас интересует отклонение интегральной суммы от интеграла по периоду:

$$R = \int_0^1 \psi(x)dx - \frac{1}{N}\int_0^1 \psi(x)d\pi(x,N) = \int_0^1 \psi(x)dx - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\psi(x_i). \qquad (4)$$

Оценим интегральную сумму при предположении, что x_n равномерная. Количество тех n, для которых дробная часть $\{f(n)\} \in (\alpha, \alpha + d\alpha)$ примерно равно $Nd\alpha$. Запишем интегральную сумму объединяя в группы точки $x_i \in (\alpha, \alpha + d\alpha)$. Поделив интервал значений $[0,1)$ на n частей $\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right), i = 0,1, \dots, n-1$ вышеприведенную сумму можно записать в виде:

$$\sum_{i=0}^{n-1}\Delta\psi_i + \sum_{i=0}^{n-1} N_i\psi(\frac{2i+1}{2n}).$$

Здесь N_i количество точек k, для которых $x_k \in \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right)$ и

$$\Delta\psi_i = \sum_{k|x_k\in\left[\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}\right)} \left(\psi(x_k) - \psi\left(\frac{2i+1}{2n}\right)\right).$$

Для непрерывной функции в (0, 1), удовлетворяющей условию Липшица, каждый член первой суммы оценивается как $C\left|x_k - \frac{2i+1}{2n}\right| \le \frac{C}{2n}$. Взяв $n = O(\sqrt{N})$ из равномерности последовательности получаем оценку первой части $O(\sqrt{N})$. Вторую часть разделим еще на две части:

$$\sum_{i=0}^{n-1} N_i\psi\left(\frac{2i+1}{2n}\right) = \frac{N}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\psi\left(\frac{2i+1}{2n}\right) + \sum_{i=0}^{n-1}(N_i - \frac{N}{n})\psi(\frac{2i+1}{2n}).$$

Первая составляющая, деленная на N , дает интеграл с ошибкой порядка $O(\sqrt{N})/N$. Вторую часть оцениваем, суммируя по Абелю. Учитывая равномерность, частичные суммы $S_k = \sum_{i=0}^{n-1}(N_i - \frac{N}{n})$ оценивается как $O(N^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$. Учитывая то, что $\psi_{i+1} - \psi_i = O\left(\frac{1}{n}\right), \psi_i = \psi(\frac{2i+1}{2n})$ получаем оценку погрешности R (отличие суммы от интеграла) как $O\left(N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)/N$. В частности, если интеграл $\int_0^1 \psi(x)dx = 0$, то для равномерной последовательности x_k

выполняется: $\sum_{i=1}^{N}\psi(x_i) = O\left(N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$.

Интегральные суммы указанного вида появляются при подсчете количества целых точек в области. Пусть задана область на плоскости, ограниченная гладкими кривыми:

$$\varphi_2(x') \leq y' \leq \varphi_1(x'), a \leq y' \leq b, \varphi_2(a) = \varphi_1(a), \varphi_2(b) = \varphi_1(b).$$

Разобьем область на прямоугольники с шагом h_1 по оси абцисс и с шагом h_2 по оси ординат. Узловые точки сетки (x', y'), для которых $x = \frac{x\prime}{h_1}, y = \frac{y\prime}{h_2}$ целые числа, назовем целыми точками. Нас интересует количество таких целых точек в заданной области. В координатах x, y наша область задается неравенствами:

$$f_2(x) \leq y \leq f_1(x'), \frac{a}{h_1} = A \leq x \leq \frac{b}{h_1} = B,$$

$$f_1(x) = \frac{1}{h_2}\varphi_1(xh_1), f_2(x) = \frac{1}{h_2}\varphi_2(xh_2).$$

Удобнее считать целые точки на границе принадлежащими в область на половину. Тогда на столбике $x = i$ в области $0 \leq y \leq f_1(x)$ количество целых точек равно $f_1(i) - g\big(f_1(i)\big)$, где

$$g(x) = \begin{Bmatrix} \{x\} - \frac{1}{2}, x \notin Z \\ 0, x \in Z. \end{Bmatrix}$$

Функция g(x) нечетная и периодическая с периодом 1. Поэтому, в полосе $f_2(i) \leq y \leq f_1(i)$ количество целых точек выражается формулой:

$$f_1(i) - f_2(i) - g\big(f_1(i)\big) + g(f_2(i)).$$

Это соответствует тому, что две половинки весов целых точек на прямой y = 0 дают вес 1. Аналогично в крайних точках $x = A, x = B$ эта величина учитывается с весом 1/2, если значения A, B целые. В дальнейшем для удобства введем обозначение для сумм по целым точкам из интервала [A, B]:

$$\sum_{A \leq x \leq B} F(x) = \theta(A)F(A) + \theta(B)F(B) + \sum_{A < x < B} F(x).$$

Здесь для граничных точек веса θ(A), θ(B) равны 1/2 если A, B целые, иначе 0. Тогда количество целых точек в области можно записать в виде такой суммы с $F(x) = f_1(x) - f_2(x) - g\big(f_1(x)\big) + g(f_2(x))$.

Функция g(x) разрывна в целых точках, где значение 0 совпадает с полусуммой пределов слева и справа. Соответственно, она совпадает с суммой своего ряда Фурье:

$$g(x) = -\sum_{k\geq 1} \frac{\sin 2\pi kx}{\pi k}.$$

В качестве примера рассмотрим g– сумму, получающуюся при вычислении целых точек $(\frac{k}{n}, \frac{m}{n})$ под параболой $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2$ после деления на n частей по каждой оси

$$\sum_{x=0}^{n} g\left(\frac{x^2}{n}\right).$$

Можно суммировать по любому множеству вычетов по модулю n, в частности при $n = \prod_i n_i, n_i = {p_i}^{k_i}$ можно суммировать по $x = \sum_i \frac{n}{n_i} x_i$, когда каждое из x_i пробегает полную систему вычетов по модулю n_i при всех i, x пробегает полную систему вычетов по модулю n. Это приводит к произведению сумм для случаев $n_i = {p_i}^{k_i}$. Последние сводятся к случаю, когда число n = p простое. Если p = 1 mod 4, то −1 является квадратичным вычетом и с каждым вычетом y в сумму входит и вычет $p - y$ и общая сумма равна нулю. Вычислим сумму в случае p = 3 mod 4:

$$\sum_{x=0}^{p-1} g\left(\frac{x^2}{p}\right) = -\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k} \sum_{x=1}^{p-1} \sin\left(\frac{2\pi k x^2}{p}\right) = \frac{\sqrt{p}}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{k}{p}\right)}{k} =$$

$$= \frac{\sqrt{p}}{\pi} \zeta(\lambda, 1) = \frac{\sqrt{p}}{\pi} \prod_{q \neq p} \frac{1}{1 - \frac{\left(\frac{q}{p}\right)}{q}} = O\big(\sqrt{p}\ln(p)\big).$$

На самом деле оценка получилась несколько завышенная. При p = 1 mod 4 число −1 является квадратичным вычетом, что приводит равенству 0 этой суммы. При p = 3 mod 4 эта сумма отрицательна и равно со знаком минус нечетному целому числу, равному числе классов поля $Q[\sqrt{-p}]$ [1].

Отметим, что для функции $f(x) = \frac{x^2}{n}$ сдвиги интервала суммирования не играют роли, т.е. $S_g(A.A+n, f)$ не зависит от A (когда A целое граничное значения входят с весом ½).

Ранее показали, что если интеграл от периодической функции Ψ(x) равен 0, то для любой равномерной последовательности $x_i, i = 1,2, \dots, N$ сумма $\sum_{i=1}^{N} \psi(x_i)$ ограничена величиной $C(\varepsilon)N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$. Это верно и для любого сдвига, получающегося при замене $x_i \to \{x_i + \beta\}$. Возникает вопрос, для какой непрерывной в интервале (0, 1) ненулевой функции Ψ(x) из такой оценки для сумм $\sum_i \psi(x_i)$ для всех сдвигов следует равномерность последовательности x_i. Можно показать, что такой функцией является g(x). Мы проверим только, что из такой оценки g– сумм $\sum_i g(x_i) = O(N^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$ при любых сдвигах $x_i \to \{x_i + \beta\}$ следует равномерность последовательности x_i. Сравним для этого две g– суммы $S_1 = S_g(x_i) = \sum_i g(x_i)$ и $S_2 = S_g(y_i) = \sum_i g(y_i), y_i = \{x_i + \beta\}$. Легко вычисляется

$$S_2 - S_1 = \beta\pi(1-\beta, N) - (1-\beta)\big(N - \pi(1-\beta, N)\big) = \pi(1-\beta, N) - (1-\beta)N.$$

По условию S_2, S_1 и их разница $S_2 - S_1 = O(N^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$ при любом β, следовательно $\pi(1-\beta, N) - (1-\beta)N = O(N^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$ при любом β. это и означает равномерность последовательности x_i.

В теории чисел обычно используют функцию $\psi(x) = e(x)$, $e(x) = e^{2\pi i x}$ и оценивают тригонометрические суммы [2; 3; 4], называемые в дальнейшем для краткости e– суммами. Они удовлетворяют условию мультипликативности Ψ(x + y) = Ψ(x)Ψ(y) и удобны во многих задачах. Функция Ψ(x) = e(x) удовлетворяет свойству:

$$\sum_{k=1}^{n} \psi(x + \frac{k}{n}) \equiv 0.$$

С одной стороны, это свойство полезное при выражении количества решений диофантовых уравнений, а с другой стороны для неравномерных даже по Вейлю последовательностей x_i суммы $\sum_i \psi(x_i)$ могут быть малыми по модулю (даже равными нулю) при любых сдвигах. Это значит, что малость оценки e– сумм $\sum_i e(x_i)$ для последовательности x_i и его сдвигов, не позволяет делать вывод о равномерности последовательности x_i.

Наиболее примечательным является отличие e– и g– сумм для линейных функций: $x_n = \{an + b\} = \{f(n)\}$. Для e– сумм сдвиг последовательности на b не влияет на модуль суммы:

$$S_e(A,B) = e\left(\left(A + \frac{N}{2} - g(A)\right)a + b\right)\frac{\sin \pi N a}{\sin \pi a}\theta, \qquad \theta = \begin{Bmatrix} 1, A \notin Z \\ \cos(\pi a), A \in Z. \end{Bmatrix}$$

Когда наклон a целое число, значение суммы, определяемое только дробной частью {a}, находится как предел при a → 0 и получается e(b)N , модуль которой N растет линейно от длины суммирования. В других случаях сумма ограничена. Если $Na \in Z, a \notin Z,$ то e– сумма равна нулю. Именно из-за этого оценка e– сумм со сдвигами не подходят для установления равномерности дробных долей. В то же время, именно это свойство делает удобным подсчет числа решений диофантовых уравнений. Количество решений сравнения: $\varphi(x_1, \dots, x_k) = 0 \; mod \; N$ выражается формулой:

$$\frac{1}{N}\sum_{x_1,\dots,x_k}\sum_{a=1}^{N} e(\frac{a\varphi(x_1,\dots,x_k)}{N}),$$

В качестве такого применения e– сумм рассмотрим количество 2r разрядных счастливых билетов в n- ирической системе исчисления, т.е. количество решений простейшего диофантова уравнения:

$$x_1 + \cdots + x_r = x_{r+1} + \cdots + x_{2r}, 0 \le x_i < n.$$

Взяв число N > (n − 1)r, получаем, что |φ(x)| < N , где $\varphi(x) = x_1 + \cdots + x_r - x_{r+1} - \cdots - x_{2r}$φ(x) = x 1 + ... + x r − x r+1 − ... − x 2r .

Соответственно, количество решений равно:

$$\frac{1}{N}\sum_{a=0}^{N-1}\sum_{x_i} e\left(\frac{a\varphi(x)}{N}\right) = \frac{1}{N}\sum_{a=0}^{N-1}\left(\frac{sin\frac{\pi an}{N}}{sin\frac{\pi a}{N}}\right)^{2r},$$

Которое не зависит от N, если N > (n − 1)r. Устремляя N → ∞ получаем известную интегральную формулу для количества счастливых билетов:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^{2r} dx = \frac{n^{2r}}{\sqrt{\frac{r(n^2-1)\pi}{3}}}\Phi(r,n).$$

Оценим введенную новую величину $\Phi(r, n)$:

$$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\ln(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}) = -\sum_{l=1}^{\infty}\frac{x^{2l}}{l\pi^{2l}}\zeta(2l) = -\sum_{l=1}^{\infty}\frac{x^{2l}|B_{2l}|4^l}{2l(2l)!}.$$

Соответственно, переходя к переменной $y = x\sqrt{\frac{r(n^2-1)}{3}}$ при $c = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r(n^2-1)}{3}}$ подучаем:

$$\Phi(r,n) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^c \exp\left(-y^2 - \sum_{l=2}^{\infty}\frac{(n^2-1)y^{2l}12^l|B_{2l}|}{r^{l-1}(n^2-1)^l(2l)!}\right)dy.$$

Учитывая, что вклад в интеграл дают только значения y, пренебрегая интегралом в интервале $[\frac{\pi}{n},\frac{\pi}{2}]$, разлагая в ряд $\exp(-\sum_l a_l y^{2l})$ получаем асимптотическое разложение для количества решений:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^{2r} dx = \frac{n^{2r}}{\sqrt{\frac{r(n^2-1)\pi}{3}}}\Phi(r,n),$$

$$\Phi(r,n) = 1 - \frac{3(n^2+1)}{40(n^2-1)} - \frac{13(n^4+1)-134n^2}{4480(r+3)^2(n^2-1)^2} + O(r^{-3}).$$

Здесь немного подправили последний член, подставив в знаменателе $(r+3)^2$ вместо r^2 (не нарушая асимптотику), учитывая, что следующий за ним член положительный. Рассмотрим классический случай r = 3, n = 10 и находим ближайшее целое число 55252, что соответствует точному значению количества счастливых чисел. Плотность счастливых чисел убывает как $O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln(x)}}\right)$ медленнее, чем плотность простых чисел $\frac{1}{\ln(x)}$. Соответственно при больших r они встречаются чаще, чем простые числа (счастливые для автора).

Вычисление тригонометрических сумм упрощается в случае суммирования по полному периоду. В суммах Гаусса удается вычислить точное значение модуля суммы.

Рассмотрим теперь линейные g− суммы, напрямую связанные с равномерностью последовательности $x_n = \{an + b\}$. Здесь b играет роль сдвига к последовательности {an}. В случае рациональности наклона $a = \frac{P}{Q}$ последовательность периодична и сумма по полному периоду определяется из следующей леммы:

Lemma 1. ***Пусть A, B ∈ Z и длина интервала суммирования L = B − A = nQ делится на период последовательности*** $\boldsymbol{x_n = \{f(x)\}, f(x) = \frac{P}{Q}x + b}$***.*** ***Тогда g− сумма*** $\boldsymbol{S_g(A, B, f)}$ ***определяется по формуле:***

$$\boldsymbol{S_g(A, B, f) = ng(QA) = n\frac{g(QA) + g(QB)}{2} = ng(Qb).} \qquad \textbf{(6)}$$

Доказательство. Так как g(f (x)) периодично g(f (x + Q)) = g(f (x), достаточно считать сумму по одному периоду. Обозначим через $b_1 = \{Qb\}$. Тогда все принимаемые значения x_n есть $\frac{i+b_1}{Q}, i = 0, \dots, Q-1$. При $b_1 = 0$ получаем $S_g(A, B) = g(0) + \sum_{i=1}^{Q-1}(\frac{i}{Q} - \frac{1}{2}) = 0$. Когда $b_1 > 0$ g(x) больше на $\frac{b_1}{Q}$ соответствующего значения за исключением *случая i = 0* где *g(i) = 0,* а разница значений $\frac{b_1}{Q} - \frac{1}{2}$. Заметим, что g(Qf (x)) = g(Qb) = g(b_1). Соответственно, сумма $S_g(A, B) = Q\frac{b_1}{Q} - \frac{1}{2}$ =g(Qf(x))=g(Qf(A)).

Следовательно, общая g− сумма длины N равна $\left[\frac{N}{Q}\right] g(Qb) + R, |R| < \frac{Q+1}{4}$. Это еще раз показывает не равномерность последовательности даже по Вейлю в случае рационального наклона.

Рассмотрим теперь случай иррационального наклона. В этом случае существенными становятся почти периоды и ближайшие к целым значения. Пусть наклон линейной функции f (x) = ax + b разложен в непрерывную дробь согласно (2). Приведем простой алгоритм для нахождения ближайшего к целому значение в интервале (A, B). Для этого находим ближайшее к целому значение снизу и сверху. Начнем с нулевого приближения $C_0 = \left[\frac{A+B}{2}\right]$. При шаге Q_k дробная часть функции изменится на

$$a_k = Q_k a - P_k, |a_k| < \frac{1}{Q_{k+1}}, sign(a_k) = (-1)^k.$$

Будем искать ближайшее к целому сверху. Ближайшей к целому снизу находится аналогично. В точке C_0 имеем дробную часть $\delta_0 = \{f(C_0)\}$. Находим следующее приближение

$$C_1 = C_0 - n_0 Q_0, \delta_1 = \{f(C_1)\} = \delta_0 - n_0 a_0, n_0 = \left[\frac{\delta_0}{a_0}\right].$$

Далее повторяем эту процедуру с учетом знака a_i:

$$C_{i+1} = C_i - (-1)^i n_i Q_i, \delta_{i+1} = \{f(C_{i+1})\} = \delta_i - (-1)^i n_i a_i, n_i = \left[\frac{\delta_i}{a_i}\right].$$

Продолжаем процедуру пока не выйдем за пределы интервала. Если это было на k– м шаге, то проверяем точку не вышедшую из интервала за счет уменьшения n_k с точкой с другого конца интервала, полученного вначале шагом в другую сторону на Q_{k+1} и шагами по Q_k выбрать минимальное значение δ_{k+1}. Когда приближаемся снизу алгоритм тот же, только расстояние до целого определяем по формуле $\delta_i = 1 - \{f(C_i)\}$ если $f(C_i)$ не целое, иначе $\delta_i = 0$. Если найдется целочисленная точка в интервале, то оба алгоритма останавливаются достигнув эту точку. На самом деле найдя ближайшую к целому точку снизу на k– м шаге при сдвиге на Q_k в одну сторону получим ближайшую сверху точку, двигаясь в другую сторону шагами Q_k другие ближайшие к целому точку снизу отдаляясь на $|a_k|$ от целого.

Вычислим g– сумму длиной $n_k Q_k$, когда $n_k \le \frac{q_{k+1}+1}{2}$. Случай $\frac{q_{k+1}+1}{2} < n_k \le q_{k+1}$ выгоднее оценить как разницу g– суммы длиной Q_{k+1} и оставшейся части.

Lemma 2. ***Пусть A, B*** $\boldsymbol{\in Z}$ ***и длина интервала суммирования*** $\boldsymbol{L = B - A = n_k Q_k, n_k \le \frac{q_{k+1}+1}{2}}$ ***делится на почти период*** $\boldsymbol{Q_k}$ ***для наклона a линейной функции f (x) = ax + b. Тогда g– сумма*** $\boldsymbol{S_g(A,B)}$ ***определяется по фомуле:***

$$\boldsymbol{S_g(A,B) = n_k \frac{g(Q_k f(A)) + g(Q_k f(B))}{2} - (-1)^k m.} \qquad (7)$$

Здесь m количество точек в области $\boldsymbol{x_* \le x < B}$ ***где*** $\boldsymbol{[Q_k f(x)]}$ ***отличается от*** $\boldsymbol{[Q_k f(A)]}$ ***и*** $\boldsymbol{[f(x) - \frac{P_k}{Q_k}(x - A)]}$ ***отличается от [f (A)]. Здесь*** $\boldsymbol{x_* = A + \frac{L}{|a_k|}}$***. Когда k четное*** $\boldsymbol{a_k > 0}$ ***и*** $\boldsymbol{Q_k f(x) - P_k x}$ ***растет, а растояние до целого есть*** $\boldsymbol{L = 1 - \{Q_k f(A)\}}$***.. При нечетном k это выражение убывает и L = {Q k f (A)}. При выполнении этих условий на границе вес***

точки в подсчете числа m уменьшается вдвое. Если эта граница совпадает с A или B, то вес уменьшается еще вдвое.

Доказательство. Определим $f_2(x) = Q_k f(x) - P_k x = a_k x + b_k$, где $a_k = Q_k a - P_k, b_k = Q_k b$. Наклон $a_k = (-1)^k |a_k|, |a_k| < \frac{1}{Q_{k+1}}$ мал (по абсолютной величине). Введем число $D = \frac{[f_2(A)] + [f_2(B)]}{2}$ и представим

$$f(x) = \frac{P_1 x + D + \delta(x)}{Q}, \delta(x) = Qf(x) - P_1 x - D$$

$$= \{Q_k f(A)\} + a_k(x - A). \qquad (8)$$

Так как $|f_2(B) - f_2(A)| = |n_k a_k Q_k| < \frac{n_k Q_k}{Q_{k+1}} < 1$ указанные числа или равны или $[f_2(B)] - [f_2(A)] = (-1)^k$. Рассмотрим вначале случай, когда они равны, соответственно D целое число. В этом случае 0 ≤ δ(x) < 1. Если все δ(x) > 0, то

$$S_g(A, D, f) = \sum_{A\le x\le B}\left(\left\{\frac{Px + D + \delta(x)}{Q}\right\} - \frac{1}{2}\right)$$
$$= n_k \sum_{i=1}^{Q_k-1} \frac{i}{Q_k} + \frac{1}{Q_k}\sum_{A\le x\le B} \delta(x) - \frac{n_k Q_k}{2}$$
$$= n_k \frac{Q_k - 1}{2} + n_k \frac{\delta(A) + \delta(B)}{2} - \frac{n_k Q_k}{2}$$
$$= n_k \frac{g\big(Q_k f(A)\big) + g\big(Q_k f(B)\big)}{2}.$$

Здесь использовали, что δ(x) линейная функция, соответственно их сумма равна полусумме значений, умноженной на число членов. Если при этом δ(x) = 0, то x является крайним значением x = A или x = B. При этом сумма остается такой же, если f (x) не целое, иначе добавится $\frac{1}{4}$.

Рассмотрим теперь случай, когда целые части $[f_2(B)] - [f_2(A)] = (-1)^k$ не равны. В этом случае D полуцелое число и $\delta(A) = \{Q_k f(A)\} - \frac{(-1)^k}{2} + a_k(x - A)$. Для определенности будем считать k четным. Случай, когда k нечетное рассматривается аналогично или сводится к этому за счет изменения знака f (x) и учета нечетности функции g(x). Тогда δ(x) будет линейно растущей функцией и переходит из области δ(A) < δ(x) < 1/2 в область δ(B) > 1/2 . Координата точки перехода x_* находится из линейного уравнения:

$$\delta(x) < \frac{1}{2} \leftrightarrow x < x_* = A + \frac{1 - 2\delta(A)}{2a_k} = A + \frac{1 - \{Q_k f(A)\}}{a_k}.$$

Пусть $i_* = (1 + [f_2(A)])P_k^{-1} mod\ Q_k, C_0 = A - i_*$. Здесь P_k^{-1} обратное к P_k по модулю Q_k . Определим точки $C_1, \dots, C_{n_k}, C_i = C_0 + iQ_k$. Пусть m количество точек $C_i \ge x_*$. Если окажется, что некоторое из $C_i = x_*$, то значение $f(C_i)$ целое и это точка входит в число m с весом $1/2$.

Вычислим

$$g\big(f(x)\big) = g\left(\frac{Px + D + \delta(x)}{Q_k}\right) = \frac{(Px + D)\ mod\ Q_k Q_k}{Q_k} + \frac{\delta(x)}{Q_k} - \theta.$$

Здесь θ = 1, если одновременно выполняется $Px + D - \frac{1}{2} = Q_k - 1\ mod\ Q_k$ и $x \geq x_*$ (в случае равенства точка учитывается с весом 1/2. Аналогично вычисляем g– сумму и получаем

$$S_g(A, B, f) = n_k \frac{\delta(A) + \delta(B)}{2} - \frac{n_k}{2} - m.$$

В нашем случае $\delta(A) = g\big(Q_k f(A)\big),\ \delta(B) = 1 + g\big(Q_k f(B)\big)$.

Таким образом:

$$S_g(A, B, f) = n_k \frac{g\big(Q_k f(A)\big) + g\big(Q_k f(B)\big)}{2} - \frac{n_k}{2} - m,$$

что доказывает лемму.

Lemma 3 Пусть длина интервала суммирования

$$\boldsymbol{L = B - A = n_k Q_k + n_{k-1} Q_{k-1}, n_{k-1} \leq q_k, n_k \leq q_{k+1}}.$$

Тогда максимум g– суммы для линейной функции f (x) = ax+c, $\boldsymbol{a = \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + ..}}}$ ***достигается, когда***

$$\boldsymbol{A = x_* - \sum_{l=k-1}^{k} n_l Q_l \frac{1 + (-1)^{l+1}}{2}, B = x_* + \sum_{l=k-1}^{k} n_l Q_l \frac{1 + (-1)^{l}}{2},}$$

$$\boldsymbol{n_l = \left[\frac{q_{l+1} + 1}{2}\right]}$$

и $\boldsymbol{\{f(x_*)\} = 1^-}$***. При этом g– сумма не превышает***

$$\boldsymbol{\frac{1}{8} \sum_{l=k}^{k+1} \left(q_l + \frac{1}{q_{l+1}}\right).}$$

Доказательство. Вычислим знак $sign(a_i) = (-1)^i$, где $a_i = Q_i a - P_i$. Сумма будет максимальной, когда $\{f(x_*)\}$ будет максимально близкой к 1 и другие наиболее близкие к 1 дробные части значений были слева на несколько шагов Q_l при четном l, и справа при нечетном l (учитывая знак $sign(a_i) = (-1)^i, a_i = Q_i a - P_i$). Для определенности посчитаем k четным. Тогда значения дробных частей в точках $A_i = x_* - iQ_k$ равны $\{f(A_i)\} = \{f(x_{i*})\} - ia_k$, где $0 < a_k = Q_k a - P_k \le \frac{1}{Q_{k+1}}$. Согласно лемме 2:

$$S_i = \sum_{A_i \le x \le A_{i-1}} g(ax+c) = \frac{g\big(Q_k(aA_i+c)\big) + g\big(Q_k(aA_{i-1}+c)\big)}{2}$$

$$= \frac{1-(2i-1)Q_k a_k}{2}.$$

Следовательно, сумма слева достигает максима, когда n_k выбирается как максимальное натуральное из условия $(2n_k - 1)Q_k a_k < 1 \to n_k = \left[\frac{b_k+1}{2}\right], b_k = \frac{1}{Q_k a_k} = \theta_k q_{k+1}, 1 \le \theta_k \le 1 + \frac{1}{q_{k+1}q_{k+2}}$. При этом сумма слева не превзойдет $\frac{n_k}{2}\left(1 - \frac{n_k}{b_k}\right) = \frac{n_k}{4}\left(1 + \frac{b_k - 2n_k}{b_k}\right)$. Из условия для n_k получаем $n_k = \left[\frac{q_{k+1}+1}{2}\right]$. Рассматривая по отдельности случаи четного q_{k+1}, когда $n_k = \frac{q_k}{2}$ и нечетного случая, когда $n_k = \frac{Q_{k+1}+1}{2}$ оценка возможного максимального значения суммы слева получается ограниченным величиной $\frac{q_{k+1}}{8} + 1/8q_{k+2}$. Действительно, если имеется n_k длин суммирования по Q_k элементом, что в точках $x_i = x_0 + Q_k * i, i \le n_k$ дробные доли $\{Q_k f(x_i)\}$ монотоно растут или убывают, то g-сумма в этом интервале будет равна площади трапеции, образованной прямыми $x = x_0 + Q_k * i, i \le n_k$, и прямой y =1/2. Причем площадь выше этой прямой принимается в расчет со знаком +, а площадь ниже этого уровня со знаком −. При этом очевидно, что площадь не превышает площади прямоугольного треугольника с одним катетом 1/2 и с тангенсом угла наклона $|Q_k a - P_k|$. Площадь этого треугольника равна

$$\frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2}|Q_k a - P_k| < \frac{1}{8}\left(q_{k+1} + \frac{1}{q_{k+2}}\right).$$

Отсюда получается утверждение леммы.

Сейчас оценим максимальное возможное значение g−суммы, когда длина суммирования меньше Q_{k+1}. Используя леммы (2), (3) легко получается следующее:

Lemma 4. Пусть длина интервала суммирования $\boldsymbol{L = B - A < Q_{k+1}}$***. Тогда максимум*** $\boldsymbol{g-}$ ***суммы для линейной функции*** $\boldsymbol{f(x) = ax+c}$***,*** $\boldsymbol{a = \frac{1}{q_1+\frac{1}{q_2+\dots}}}$ ***достигается, когда***

$$\boldsymbol{A = x_* - \sum_{l=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} n_{2l}Q_{2l}\,, B = x_* + \sum_{l=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} n_{2l+1}Q_{2l+1}\,, n_l = \left[\frac{q_{l+1}+1}{2}\right]}$$

и $\boldsymbol{\{f(x_*)\} = 1^-}$***. При этом g-сумма по модулю не меньше, чем***

$$\boldsymbol{S_{max} \leq \frac{1}{8}\sum_{l=1}^{k+1}\left(q_l + \frac{1}{q_{l+1}}\right).} \qquad \boldsymbol{(9)}$$

Последний член $\boldsymbol{\frac{1}{q_{k+2}}}$ ***можно считать равным 1.***

Доказательство. Доказательство получается непосредственно из леммы (3).

Отклонение g– суммы от нуля при иррациональном наклоне характеризует асимметрию иррационального числа. Числа, для которых при любом c>2 имеется только конечное число рациональных приближений с условием $\left|a - \frac{P}{Q}\right| < \frac{1}{Q^c}$ назовем нормальными. Известно, что почти все иррациональные числа (за исключением меры 0) нормальны. Для нормальных наклонов из (9) получается, что

$$|S_g(A,B)| = O((B-A)^{\varepsilon})$$

при любом $\varepsilon > 0$.

Равномерность целых чисел и дробных долей

В теории чисел часто возникает вопрос равномерности распределения определенного вида последовательности целых чисел, например последовательности простых чисел. В этом случае приведенное в первом параграфе определение не работает.

Пусть последовательность x_n обладает следующим свойством - в каждом конечном интервале (A, B) число членов x_n, принадлежащих этому интервалу - π(A, B) конечно. Тогда можно говорить о средней длине между членами последовательности $\frac{B-A}{\pi(A,B)}$ или плотности их распределения на единицу длины $\varphi(A,B)=\frac{\pi(A,B)}{B-A}$. Однако, так получается средняя плотность последовательности в интервале. Нам необходимо точечное распределение, когда B − A = o(B) выполняется $\frac{\varphi(A,B)}{\rho(B)}-1=o(1)$. $\frac{\varphi(A,B)}{\rho(B)}-1=o(1)$. Это означает, что функция плотности ρ(x) меняется плавно, т.е. $\frac{x\rho\prime(x)}{\rho(x)}=o(1)$ при больших x. Тогда количество членов последовательности с большой относительной точностью выражается интегралом:

$$\pi(A,B)=M+R, M=\int_A^B\rho(a)da\,, \frac{R}{M}=o(1), M\to\infty.$$

Вейль примерно так и определил равномерность распределения последовательности. Не нарушая ничего мы можем упорядочить (перенумеровать) члены последовательности по росту: $x_0\le x_1\le x_2$ ... взяв в качестве x_0 наиболее близкий к 0 и не обращая внимания, что при этом могут появится и номера с отрицательными индексами. Допустим, что относительное отклонение длины интервала между соседними членами $\rho(x_n)(x_{n+1}-x_n)$ ведет себя как случайная величина с дисперсией меньше 1. Тогда отклонение R при больших M вело бы себя как среднеквадратичное отклонение, т.е. как $O(\sqrt{M}), M\to\infty$. Подражая этому, определим равномерность последовательности x_n, как существование плотности распределения $\rho(x), \frac{x\rho'(x)}{\rho(x)}\to 0, x\to\infty$, что при любом ε > 0 существует C = C(ε), что

$$\pi(A,B)=M+R, M=\int_A^B\rho(a)da\,,$$

$$|R|<C(\varepsilon)\ln(1+|B|)\,(1+M)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}. \qquad (10)$$

В частности, гипотеза Римана эквивалентна равномерности распределения простых чисел с плотностью $1/\ln(a)$ для больших интервалов, когда B − A = O(B). Выполнение этого соотношения и для малых интервалов влечет $p_{k+1}-p_k=O(ln^2p_k)$. Доказать выполнение соотношения (10) и для малых интервалов более трудная задача. При рассмотрении только больших интервалов нижнюю границу A в (10) можно считать фиксированным числом. При распределении положительных целых чисел для удобства можем положить A = 2. Если величину $\rho(x_n)(x_{n+1} - x_n)$ рассмотреть как случайную положительную величину (шаг) со средним значением 1, то R в (10) представляет примерное отклонение за M шагов. Отклонение больше, чем $C\sqrt{M}$ становится маловероятной, что при C = O(ln B) вообще невозможной. Примерно эти мотивы служат оправданием определения равномерности последовательности в (10).

Часто вопросы равномерности некоторой последовательности сводятся к равномерности распределения дробных долей функции:

$$x_n = \left\{\frac{1}{h_2} f(h_1 n)\right\}, n = 1,2, \dots, N = O\left(\frac{1}{h_1}\right) \qquad (11)$$

при малых h_1, h_2. Здесь члены последовательности ограничены в интервале [0, 1) и рост количества членов последовательности в заданном интервале обеспечивается за счет уменьшения параметра шага h_1, а их случайное поведение за счет $\frac{h_1}{h_2} \to \infty$. Например, в теории чисел вопрос равномерности распределения простых чисел сводится к равномерности дробных долей $x_n = \{tln(p_n)\}, n = 1,2, \dots, N, t > N^2$. Дробные доли обычно получаются как остатки после вычета целого и появляются равномерно распределенными. Соответственно, выражение (10) означает, что количество тех $x_n, n \le N$ для которых $0 \le x_n < \alpha < 1$ задается как $\alpha N + R, |R| < C(\varepsilon, t) N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$.

В таком случае равномерность означает, что остаточный член в оценке целых точек $(h_1 i, h_2 j), i, j \in Z$ в области через интеграл, оценивается величиной $O(N^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$. Как увидим ниже, к такой форме равномерности сводятся многие задачи теории чисел.

Пусть в плоскости задана некоторая область $f'_2(x) \le y' \le f'_1(x),\ a \le x' \le b$. Нанесем сетку с шагом h_1 по оси абцисс и с шагом h_2 по оси ординат и запишем неравенства определяющие область в безразмерных переменных

$x = \frac{x'}{h_1}, y = \frac{y'}{h_2}, A = \frac{a}{h_1}, B = \frac{b}{h_1}$. Точки с координатами (x, y) = (n, m), n ∈ Z, m ∈ Z назовем целыми точками. В дальнейшем договоримся считать целые точки, находящиеся на гладкой границе, за 1/2 точки, попавшейся в область, угловые точки за 1/4 точки. Пусть область задана с помощью неравенств:

A ≤ x ≤ B, 0 ≤ y ≤ f (x) =$\frac{1}{h_2} f'(xh_1)$.

Договоримся так же, что сумма $\sum_{A \le x \le B} \varphi(x)$ означает сумму по всем целым x:

$$\sum_{A \le x \le B} \varphi(x) = \theta_1 \varphi(A) + \theta_2 \varphi(B) + \sum_{A < x < B} \varphi(x)$$

включая крайние значения с весом $\theta_1 = \frac{1}{2},\ if\ A \in Z,\ \theta_2 = \frac{1}{2},\ \ if\ B \in Z.$ Предположим так же, что всегда B − A ∈Z, т.е. $\theta_1 = \theta_2$. Тогда безразмерная площадь области (в единицах $h_1\, h_2$) выражается через интегральную сумму Симпсона формулой:

$$S = \sum_{A \le x \le B} f(x) - I',$$

где I' ошибка интегральной суммы, рассчитанной по формуле трапеции (с линейной аппроксимацией функции между целочисленными значениями аргумента), которая часто не превосходит некоторой константы. Действительно, сумма

$$\sum_{A \le k \le B} g(f(k)) = \sum_{k} (S_{tr}(k, k+1) - N(k, k+1)),$$

где $S_{tr}(k, k+1)$- площадь трапеции между прямыми x = k и x = k + 1 с нижней границей y = 0 и с верхней y = f (k) + (f (k + 1) − f (k))(x − k), число N (k, k + 1) – означает количество целых точек в этой трапеции. Внутри такой трапеции целых точек нет, граничные целые точки считаются с весом 1/2 , а вершины (угловые точки, если они целые) с весом 1/4 . При присоединении двух трапеций веса общих граничных целых точек суммируются и они приобретают вес 1, а целые точки на вершинах приобретают вес 1/2.

$$N(k,k+1)=\frac{1}{2}\big([f(k)]+\theta(k)+[f(k+1)]+\theta(k+1)\big),$$

где

$$\theta(k)=\left\{\begin{matrix}0, & f(k)\notin Z\\ \frac{1}{2}, & f(k)\in Z.\end{matrix}\right)$$

Так как между графиком и трапециями нет целых точек, количество целых точек под графиком определяется как $N=\sum_k S_{tr}-S_g(A,B)=S+I'-S_g(A,B)$. Здесь через $S_g(A,B)$ - обозначено g– сумма, через S площадь под кривой, через I' площадь между трапециями и кривой, которая оценивается как $\sum_k\frac{f''(k+\frac{1}{2})}{12}$ и является ошибкой при подсчете площади по методу Симпсона. Для выпуклых областей эта величина примерно равна $I=\frac{2\sqrt{2}}{3}(1+O(\max(h_1,h_2))$.

Количество целых точек в области с учетом предложенного подсчета с весами для граничных целых точек, выражается по формуле:

$$N_0=S-S_g(A.B)+I',\qquad S_g(A.B)=\sum_{A\le x\le B}g\big(f(x)\big).\qquad (12)$$

Учитывая нечетность функции g получаем, что для симметричной области −f (x) ≤ y ≤f (x) при вычислении N_0 достаточно ввести коэффициент 2 перед $S_g(A.B)$. В частности для круга радиуса 1 $(h_1=h_2=h, R=1/h)$, количество целых точек с учетом симметрии выражается формулой:

$$N_0=\pi R^2-8\left(\sum_{0\le x\le\frac{R}{\sqrt{2}}}g\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)+I'\right)|I'|<\frac{1}{2}.$$

Отметим еще одно важное свойство g– сумм, связывающее g– суммы самой функции $S_g(f)$ с g– суммой обратной функции $S_g(\varphi)$, y = f (φ(y)). Для монотонно растущих выпуклых функций

$$S_g(f)+S_g(\varphi)=I'_f+I'_\varphi,$$

для монотонно убывающих

$$S_g(f)-S_g(\varphi)=I'_f-I'_\varphi.$$

Заметим, что $\varphi'' = \frac{-f''}{f'^3}$, соответственно в первом случае I'_φ отрицательная величина для выпуклых функций. Поэтому справа в обеих случаях стоит площадь между двумя линейными аппроксимациями графика кривой. Эта площадь легко оценивается интегралами и дает возможность оценить одну сумму через другую.

Для вычисления общих g– сумм удобно аппроксимировать основную функцию f (x) линейными функциями (разные в разных интервалах) с рациональными наклонами $f_2(x) = ax + b$ так, чтобы между их графиками не было целых точек или целых точек под графиком f(x), но выше аппроксимирующей функцией было примерно такое же количество целых точек, сколько и выше графика, но ниже аппроксимирующей функции. Тогда одну g– сумму можно выразить через другую:

Lemma 5. Пусть f (x), f 2 (x) две функции определенные в интервале (A, B), A ∈ Z, B ∈ Z. Тогда g суммы $\mathbf{S_1 = S_g(A, B, f), S_2 = S_g(A, B, f_2)}$ отличаются на интегральную сумму от разницы

$$\mathbf{I = \frac{1}{2}\big(f(A) - f_2(A) + f(B) - f_2(B)\big) + \sum_{A<x<B} \big(f(x) - f_2(x)\big) - \frac{1}{2}(N_1 - N_2).}$$

Где $\mathbf{N_1}$ количество целочисленных точек (i, j), что $\mathbf{f_2(i) \le j \le f(i)}$, а $\mathbf{N_2}$ количество целочисленных (i, j), что $\mathbf{f(i) \le j \le f_2(i)}$. При этом крайние точки A, B в случае целочисленности значений учитываются с весом 1/2. Целочисленные точки на границе (i, j = f (i)) при подсчете $\mathbf{N_1}$ считаются с весом ½, а точки (i, j = $\mathbf{f_2(i)}$) с весом −1. Аналогично меняются знаки весов при подсчете $\mathbf{N_2}$.

Доказательство. Доказательство непосредственно следует из определения g– функции.

Когда вычисляем g сумму для функции f (x), мы можем подобрать соответствующую кусочно линейную функцию с рациональным наклоном $f_2(x)$ так, чтобы была разница I = 0 или так, чтобы g сумма от $f_2(x)$ была равна нулю. В последнем случае, за $f_2(x)$ можно взять кусочно линейную функцию, которая непрерывна и меняет свой наклон всегда в целочисленных (опорных) точках. Соответственно, в этом случае тангенс угла наклона $a = \frac{P}{Q}$.

Когда на графиках появляются целочисленные точки, то надо их вычесть от разницы I с весом 1/2 , если они появляются между двумя графиками, то с разницы I надо вычесть их с полноценным весом 1. Эти соображения позволяют хорошо оценить g– суммы и доказать равномерность распределения дробных долей гладких функций с малой второй производной. В качестве использования этого подхода укажем на построение опорных хорд. Допустим, что график функции f (x) выпуклый ($f''(x)$ > 0). Поднимем касательную с рациональным наклоном параллельно так, чтобы она прошла хотя бы через одну целочисленную точку выше графика. Если на поднятой прямой окажется по крайней мере две целочисленные точки выше (точнее не ниже, целочисленные точки на кривой считаются выше и являются опорными точками) кривой, то они образуют опорную хорду. Увеличивая наклон луча от полученной целочисленной точки до тех пор, пока она не пройдет через другую целочисленную точку выше кривой, получим опорную хорду справа этой точки. Слева опорная хорда получается с уменьшением наклона. Если бы график совпал с опорными хордами g– сумма была бы равна 0. Из леммы (5) получается следующее следствие:

Следствие. g– сумма равна половине целочисленных точек на опорных хордах строго выше графика минус площадь между опорными хордами и графиком кривой с точностью до $O(Lf'')$, где L длина суммирования.

Построение опорных хорд всегда возможна сверху графика для выпуклых функций и снизу для впуклых, т.е. с внутренней стороны выпуклой фигуры. В случае, когда график является прямой, то можно построить как снизу, так и сверху. Опорные хорды строятся однозначно. Они определяются последовательностью таких целочисленных точек, соединенных прямыми, что между графиком и хордами отсутствуют целочисленные точки. При отсутствии выпуклости или впуклости легко привести примеры, когда такое построение невозможно. Однако, имеется возможность схожего построения, когда опорные целые точки расположены не обязательно с одной стороны. В этом случае площадь между кривой и опорными хордами надо считать с учетом знака плюс, пока хорда проходит выше графика и со знаком минус, когда ниже графика.

Опорные хорды образуют кусочно линейную непрерывную функцию, угол наклона которых меняется только в целых точках плоскости. Они остаются опорными хордами и для обратной функции. При оценке g– суммы от f (x) можно ограничится областью, где $0 \leq f'(x) \leq 1$, так как $S_g(f) = S_g(f - kx), k \in Z$ и даже областью $0 \leq f'(x) \leq 1/2$ из-за нечетности f $S_g(f) = -S_g(x - f)$. Переходя к обратной функции и вычитывая линейную функцию с целым наклоном получим функцию с производной в интервале [0, 1]. Переходя опять к обратной и вычитывая целочисленную можно продолжить этот процесс. В результате мы приходим к переменным, связанными модулярным преобразованием от исходных:

$$z = Qy - Px + A, s = Q'y - P'x + B, \qquad (13)$$

с обратным преобразованием

$$x = sign * (Qs - Q'z) + C, y = sign * (Ps - P'z) + D,$$
$$sign = PQ' - QP' = \pm 1. \qquad (14)$$

Здесь $\frac{P}{Q}, \frac{P\prime}{Q\prime}$ последовательные приближения наклона f', получаемые при разложении в непрерывную дробь. Когда сумма рассматривается только в ограниченной области можно говорить только о почти инвариантности g– суммы относительно таких преобразований. Даже, когда речь идет о сумме по всей области, нет полной инвариантности из-за роста ошибки подсчета площади в таких переменных при больших Q, Q'.

Такие преобразования взаимно однозначно переводят целые точки в целые точки и сохраняют площади. Соответственно, при таком преобразовании сохраняются площади, прямые переходят в прямые и кривые второго порядка в кривые второго порядка. g– сумма, представляемая как интегральная сумма при вычислении площади под кривой, отличается от этой площади только на ошибку интегрирования по Симпсону и "почти" сохраняется при преобразованиях. Слово "почти" здесь употребляется из-за того, что ошибка интегральной суммы S' не сохраняется. Однако, она мала, если $|PQ' + QP'|$ не большое. В дальнейшем этот принцип будет уточняться. Идея такого преобразования заключается в том, чтобы границу покрыть параллелограммами (площадью 1) растянутыми вдоль направления границы с примерной длиной диагонали порядка $h^{-1/4}$. Потратив тем самым порядка $h^{-3/4}$ параллелограмм. С помощью классических соображений оценка погрешности получится $(h^{-\frac{3}{4}})^{2/3} = h^{-1/2}$ с логарифмическими множителями. Для g– сумм легче реализовать эту идею непосредственно. Для e– сумм такие оценки получаются опосредственно, через оценку равномерности распределения дробных долей.

На e– и g– суммы можно смотреть с точки зрения Броуновского движения. В первом случае движение (каждый шаг суммирования по x рассматривается как случайное броуновское передвижение) происходит в плоскости на шаг единичный длины со случайным направлением, во втором случае по прямой со случайным, равномерно распределенным шагом $-\frac{1}{2} < h < 1/2$. Естественно ожидать, что суммарное движение даст величину $O(\sqrt{N})$ за N шагов. Имеется тесная связь понятия равномерности с получением осредненных уравнений в механике сплошных сред и с учетом вклада броуновского движения в диссипации. В дальнейшем будем уточнять и обосновывать отдаление суммы от нулевого (начального) положения примерно пропорционально $\sqrt{N}$ как и броуновская частица от своего начального положения.

Соответственно, первые (e–) суммы удобнее использовать при подсчете количества решений диофантовых уравнений, вторые при оценке количества целых точек в заданной области.

Заключение

Здесь вводится понятие равномерности, более строгое, чем у Вейля. Они непосредственно связаны с введенными g-суммами. Оценка последних порою проще, чем оценка тригонометрических сумм вследствие их почти инвариантности относительно модулярных преобразований. Здесь изложены только оценки линейных g-сумм и самые первые методы их оценки. Работа будет продолжена в дальнейшем.

Библиографический список:

1. З. И. Боревич, И. Р. Шафаревич. Теория чисел. М., Наука, 1975.
2. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. М., Наука, 1971.
3. Виноградов И. М. Особые варианты метода тригонометрических сумм. М.: Наука, 1976.
4. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1975.