УДК 519.672 **Технические науки**

Сидоров Андрей Алексеевич, *студент второго курса магистратуры, Институт инновационных технологий и государственного управления, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «МИРЭА – Российский технологический университет»*

Безрук Владислав Вячеславович, *студент четвертого курса бакалавриата, Институт информационных технологий, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «МИРЭА – Российский технологический университет»*

Семенов Георгий Заалович, *студент четвертого курса бакалавриата, Институт информационных технологий, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «МИРЭА – Российский технологический университет»*

Крутяков Антон Викторович, *студент четвертого курса бакалавриата, Институт информационных технологий, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «МИРЭА – Российский технологический университет»*

СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ ПОИСКА КОЭФФИЦИЕНТОВ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ МАТРИЦ 4×4

Аннотация: в работе, используя систему Mathcad, сравниваются методы поиска коэффициентов характеристического уравнения для матриц 4 на 4.

Ключевые слова: методы поиска коэффициентов характеристического уравнения, характеристическое уравнение, сравнение методов поиска характеристического уравнения.

Annotation: in the work, using the Mathcad system, search methods for characteristic equation’s coefficients for 4x4 matrices are being compared.

Key words: search methods for coefficients of the characteristic equation, characteristic equation, comparison of search methods for the characteristic equation.

Известно, что комплексное число $\lambda \in C$ является собственным значением квадратной матрицы $A_{n\times n}$, если $\exists$ ненулевой вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ с комплексными компонентами $x_i \in C$, удовлетворяющий следующему уравнению:

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \qquad (1)$$

Далее представим уравнение (1) в следующем виде:

$$(A - \lambda\mathrm{E})\vec{x} = 0 \qquad (2)$$

Где Е- единичная матрица одинокого порядка с заданной квадратной матрицей A (в общем случае n).

Данная однородная система линейных алгебраических уравнений имеет ненулевое решение $\vec{x}$ тогда и только тогда, когда определитель матрицы этой системы равен нулю:

$$det(A - \lambda\mathrm{E}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (3)$$

Вычисление определителя (3) сводится к так называемому характеристическому уравнению матрицы A, имеющее следующий вид:

$$(-1)^n(\lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - p_2\lambda^{n-2} - \dots - p_{n-1}\lambda - p_n) = 0 \qquad (4)$$

Где $p_1 \dots p_n$- численные коэффициенты.

Из Основной теоремы Алгебры известно, что у уравнения $n-$ой степени ровно n корней, так что количество собственных значений будет совпадать с размерностью заданной квадратной матрицы.

Поиск собственных значений и далее собственных векторов матриц является достаточно сложной вычислительной задачей с которой приходится сталкиваться специалистам в различных областях, связанных и с информационными технологиями, и с инженерными науками, и т.д.

Существует множество методов для поиска коэффициентов характеристического уравнения и далее поиска собственных значений и собственных векторов матриц.

Целью данного является сравнения 3-х известных методов поиска коэффициентов характеристического уравнения для произвольной квадратной матрицы $A_{4\times4}$, а именно методы: 1) Данилевского, 2) Крылова, 3) Леверрье, а также будет использована готовая формула для поиска характеристического уравнения.

Методическая актуальность данной работы обусловлена ознакомлением с вариативностью методов для матриц $A_{4\times4}$ и формулами для поиска коэффициентов характеристического уравнения матриц $A_{2\times2}$, $A_{3\times3}, A_{4\times4}$. А также, анализе используемых способов с точек зрения: 1) реализации с помощью машины и без, 2) сложности составления алгоритма.

Научная актуальность исследования заключается в сравнении результатов быстродействия алгоритмов поиска коэффициентов характеристического уравнения [1].

Объектом исследования является сравнения затраченного машиной времени для поиска коэффициентов характеристического уравнения, а также сложность написания для этого алгоритма и его универсальность.

Предметом исследования являются методы: 1) Данилевского, 2) Крылова, 3) Леверрье и формула для поиска коэффициентов характеристического уравнения.

В исследовании в совокупности использованы следующие методы научного познания: наблюдения, сравнения, экспериментальный, анализа и синтеза, абстрагирования и др.

В рамках исследования используется следующая матрица (выбор чисел случаен и не влияет на результаты эксперимента):

$$A = \begin{bmatrix} 1.9 & 1.6 & 1.7 & 1.8 \\ 1.6 & 2.9 & 1.6 & 1.3 \\ 1.7 & 1.6 & 3.9 & 1.4 \\ 1.8 & 1.3 & 1.4 & 4.9 \end{bmatrix}$$

Все вышеописанные способы нахождения коэффициентов характеристического уравнения были реализованы в системе Mathcad 15.

ПОИСК КОЭФФИЦИЕНТОВ ИСПОЛЬЗУЯ ГОТОВУЮ ФОРМУЛУ

Введем обозначения:

TrA −след матрицы A

$detA$ −определитель матрицы A

M_{ij} −миноры второго порядка

M_i −миноры третьего порядка

Определение следа матрицы может показаться нетривиальным- операция, отображающая пространство матриц вида $A_{n\times n}$ в поле, над которым определена матрица. В рамках нашего исследования ограничимся всем более очевидным определением следа матрицы- сумма элементов главной диагонали. Для данного определения справедлива следующая формула:

$$Tr\ A = \sum_i a_{ii}$$

Необходимо также помнить и о свойствах следа матрицы:

1. Линейность $Tr(\alpha A + \beta B) = \alpha Tr\ A + \beta Tr\ B$
2. $Tr\ (AB) = Tr\ (BA)$
3. $Tr\ A = Tr\ A^T$ след матрицы A равен следу транспонированной матрицы A , так как след является инвариантом.
4. $\ln \det A = Tr \ln A$
5. Сумма собственных значений матрицы равна ее следу
6. Если $A \otimes B$ тензорное произведение матриц то $Tr\ A \otimes B = (Tr\ A)(Tr\ B)$
7. Определитель матриц вида $A_{n\times n}$ можно выразить через следы степеней этой матрицы, но не превосходящие n.

И другие свойства.

Для получения характеристического уравнения с коэффициентами минуя различные методы справедливы следующие формулы:

1) Для матриц $A_{2\times2}$: $\lambda^2-(TrA)\lambda+\det A=0$

2) Для матриц $A_{3\times3}$: $\lambda^3+(TrA)\lambda^2-[M_{11}+M_{22}+M_{33}]\lambda+\det A=0$

3) Для матриц $A_{4\times4}$:

$$\lambda^4-(TrA)\lambda^3+[M_{12}+M_{13}+M_{14}+M_{23}+M_{24}+M_{34}]\lambda^2-[M_1+M_2+M_3+M_4]\lambda+\det A=0$$

Докажем формулу $\lambda^2-(TrA)\lambda+\det A=0$ для определителя вида $det(A-\lambda\text{E})$ матриц $A_{2\times2}$, предполагая, что:

$Tr\,A=a_{11}+a_{22}$ – по определению следа матрицы

$\det A=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$

Пусть дана матрица $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$.

Для поиска характеристического уравнения вычислим определитель:

$$det(A-\lambda\text{E})=\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda\end{vmatrix}=0$$

Раскрывая определитель получаем следующее выражение:

$$(a_{11}-\lambda)(\,a_{22}-\lambda)-a_{21}a_{12}=0$$

Далее упростим полученное уравнение раскрыв скобки:

$$a_{11}a_{22}-a_{11}\lambda-a_{22}\lambda+\lambda^2-a_{21}a_{12}=0$$

$$\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+[a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}]=0$$

Легко видеть, что $(a_{11}+a_{22})$-$Tr\,A$, а $[a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}]$-$\det A$. Следовательно, формула верна. Ч.т.д.

Далее на рисунке (рис.1) приведены результаты использования готовой формулы для матрицы $A_{4\times4}$.

$$start := время(0)$$

$$a_{11} := 1.9 \quad a_{12} := 1.6 \quad a_{13} := 1.7 \quad a_{14} := 1.8$$
$$a_{21} := 1.6 \quad a_{22} := 2.9 \quad a_{23} := 1.6 \quad a_{24} := 1.3$$
$$a_{31} := 1.7 \quad a_{32} := 1.6 \quad a_{33} := 3.9 \quad a_{34} := 1.4$$
$$a_{41} := 1.8 \quad a_{42} := 1.3 \quad a_{43} := 1.4 \quad a_{44} := 4.9$$

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$M_{12} := \left|\begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}\right| = 17.15 \qquad M_{14} := \left|\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\right| = 8.75 \qquad M_{24} := \left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}\right| = 4.52$$

$$M_{13} := \left|\begin{pmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44} \end{pmatrix}\right| = 12.52 \qquad M_{23} := \left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{pmatrix}\right| = 6.07 \qquad M_{34} := \left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right| = 2.95$$

$$M_1 := \left|\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}\right| = 36.424 \quad M_3 := \left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{pmatrix}\right| = 9.336$$

$$M_2 := \left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}\right| = 14.356 \quad M_4 := \left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\right| = 6.964$$

$$p_1 := a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} = 13.6$$
$$p_2 := M_{12} + M_{13} + M_{14} + M_{23} + M_{24} + M_{34} = 51.96$$
$$p_3 := M_1 + M_2 + M_3 + M_4 = 67.08$$
$$p_4 := |A| = 21.936$$
$$finish := время(0)$$
$$calc\_time := finish - start = 0.113$$

Рис.1Результаты использования готовой формулы для матрицы $A_{4\times4}$

Исходя из вычислений характеристическое уравнение имеет следующий вид:

$$\lambda^4 - 13.6\lambda^3 + 51.96\lambda^2 - 67.08\lambda + 21.936 = 0$$

Временной результат отработки алгоритма: **0.113**

Также следует отметить универсальность алгоритма, иными словами, так как используется готовая формула результат зависит только от входных данных.

МЕТОД ДАНИЛЕВСКОГО

Метод А.М. Данилевского заключается в следующем:

Исходная квадратная матрица $A_{n\times n}$ преобразуется в подобную ей матрицу Фробениуса следующего вида:

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

С помощью матрицы подобия B по формуле $P = B^{-1}AB$. При этом

$$\det(P - \lambda \mathrm{E}) = \det(B^{-1}AB - \lambda \mathrm{B}) = \det(B^{-1}(A - \lambda \mathrm{E})\mathrm{B})$$

$$= \det B^{-1} \det(A - \lambda \mathrm{E}) \det B = \det(P - \lambda \mathrm{E})$$

Что означает совпадение характеристических уравнений подобных матриц.

После всех преобразований коэффициенты характеристического уравнения матрицы A определяются первой строкой матрицы Фробениуса. Согласно методу переход от матрицы A к подобной матрице P осуществляется с помощью $n-1$ преобразований подобия, последовательно преобразующих строки матрицы A , начиная с последней, в соответствующие строки матрицы P.[2]

Далее на рисунке (рис.2) приведены результаты использования метода Данилевского:

$start := время(0)$

$a_{11} := 1.9 \quad a_{12} := 1.6 \quad a_{13} := 1.7 \quad a_{14} := 1.8$

$a_{21} := 1.6 \quad a_{22} := 2.9 \quad a_{23} := 1.6 \quad a_{24} := 1.3$

$a_{31} := 1.7 \quad a_{32} := 1.6 \quad a_{33} := 3.9 \quad a_{34} := 1.4$

$a_{41} := 1.8 \quad a_{42} := 1.3 \quad a_{43} := 1.4 \quad a_{44} := 4.9$

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$B_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-a_{41}}{a_{43}} & \frac{-a_{42}}{a_{43}} & \frac{1}{a_{43}} & \frac{-a_{44}}{a_{43}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1.286 & -0.929 & 0.714 & -3.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(B_1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1.8 & 1.3 & 1.4 & 4.9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D_1 := (B_1)^{-1} A B_1 = \begin{pmatrix} -0.286 & 0.021 & 1.214 & -4.15 \\ -0.457 & 1.414 & 1.143 & -4.3 \\ -5.749 & -0.953 & 12.471 & -30.21 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-(-5.749)}{-0.953} & \frac{1}{-0.953} & \frac{-12.471}{-0.953} & \frac{-(-30.21)}{-0.953} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6.033 & -1.049 & 13.086 & -31.7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(B_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5.749 & -0.953 & 12.471 & -30.21 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D_2 := (B_2)^{-1} D_1 B_2 = \begin{pmatrix} -0.415 & -0.022 & 1.495 & -4.829 \\ 10.947 & 14.013 & -57.501 & 74.531 \\ -4.332 \times 10^{-4} & 1 & 2.298 \times 10^{-3} & -4.529 \times 10^{-3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_3 := \begin{bmatrix} \frac{1}{10.947} & \frac{-14.013}{10.947} & \frac{-(-57.501)}{10.947} & \frac{-74.531}{10.947} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0.091 & -1.28 & 5.253 & -6.808 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(B_3)^{-1} = \begin{pmatrix} 10.947 & 14.013 & -57.501 & 74.531 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D_3 := (B_3)^{-1} D_2 B_3 = \begin{pmatrix} 13.6 & -51.955 & 67.009 & -21.826 \\ 1 & 4.453 \times 10^{-5} & -1.554 \times 10^{-3} & 1.46 \times 10^{-3} \\ -3.957 \times 10^{-5} & 1 & 2.245 \times 10^{-5} & -1.579 \times 10^{-3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$finish := время(0)$

$calc\_time := finish - start = 0.097$

Рис.2 Результаты использования метода Данилевского.

Исходя из вычислений характеристическое уравнение имеет следующий вид:

$$\lambda^4 - 13.6\lambda^3 + 51.955\lambda^2 - 67.009\lambda + 21.826 = 0$$

Временной результат отработки алгоритма: **0.097**.

МЕТОД КРЫЛОВА

Метод Крылова используется для расчета собственных чисел и собственных векторов.

Характеристический многочлен: $D(\lambda) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + \dots + p_n$;

подставим матрицу A:

$$A^n + p_1 A^{n-1} + \dots + p_{n-1}A + p_n E = \hat{0}, \qquad (6)$$

т.е. матрица порядка n, вся состоящая из нулей.

Берем любой вектор

$$y^{(0)} = \begin{bmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ \vdots \\ y_n^0 \end{bmatrix},$$

подставим в (6), получим: $A^n\vec{y}^{(0)} + p_1 A^{n-1}\vec{y}^{(0)} + \dots + p_{n-1}A\vec{y}^{(0)} + p_n\vec{y}^{(0)} = \vec{0}$.

Пусть $A^k\vec{y}^{(0)} = \vec{y}^{(k)}$: $\begin{cases} \vec{y}^{(1)} = A\vec{y}^{(0)} \\ \vec{y}^{(k)} = A\vec{y}^{(k-1)} \end{cases}$, (7)

Тогда $\begin{cases} p_1 y_1^{n-1} + p_2 y_1^{n-2} + \dots + p_{n-1}y_1^1 + p_n y_1^0 = -y_1^n \\ p_1 y_2^{n-1} + p_2 y_2^{n-2} + \dots + p_{n-1}y_2^1 + p_n y_2^0 = -y_2^n \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \cdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ p_1 y_n^{n-1} + p_2 y_n^{n-2} + \dots + p_{n-1}y_n^1 + p_n y_n^0 = -y_n^n \end{cases}$ (8)

Алгоритм нахождения собственных значений методом Крылова:

1. выбор $y^{(0)}$,
2. расчет (7) и подстановка в (8),
3. решение (8) методом Гаусса относительно коэффициентов $P_i\left(i = \overline{1,n}\right)$ характеристического многочлена.

Далее на рисунке (рис.3) приведены результаты использования метода Крылова:

$start := время(0)$

$a_{11} := 1.9 \quad a_{12} := 1.6 \quad a_{13} := 1.7 \quad a_{14} := 1.8$

$a_{21} := 1.6 \quad a_{22} := 2.9 \quad a_{23} := 1.6 \quad a_{24} := 1.3$

$a_{31} := 1.7 \quad a_{32} := 1.6 \quad a_{33} := 3.9 \quad a_{34} := 1.4$

$a_{41} := 1.8 \quad a_{42} := 1.3 \quad a_{43} := 1.4 \quad a_{44} := 4.9$

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$s_0 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$i := 1..4$

$s_i := A \cdot s_{i-1}$

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1.9 \\ 1.6 \\ 1.7 \\ 1.8 \end{pmatrix}$$

$$s_2 = \begin{pmatrix} 12.3 \\ 12.74 \\ 14.94 \\ 16.7 \end{pmatrix}$$

$$s_3 = \begin{pmatrix} 99.212 \\ 102.24 \\ 122.94 \\ 141.448 \end{pmatrix}$$

$$s_4 = \begin{pmatrix} 815.691 \\ 835.822 \\ 1.01 \times 10^3 \\ 1.177 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$b := s_4$

$$s := \operatorname{augment}(s_3, s_2, s_1, s_0) = \begin{pmatrix} 99.212 & 12.3 & 1.9 & 1 \\ 102.24 & 12.74 & 1.6 & 0 \\ 122.94 & 14.94 & 1.7 & 0 \\ 141.448 & 16.7 & 1.8 & 0 \end{pmatrix}$$

$p := \operatorname{lsolve}(s, b)$

$$p = \begin{pmatrix} 13.6 \\ -51.96 \\ 67.08 \\ -21.936 \end{pmatrix}$$

$$p := \begin{pmatrix} -p_3 \\ -p_2 \\ -p_1 \\ -p_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21.936 \\ -67.08 \\ 51.96 \\ -13.6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$finish := время(0)$

$calc\_time := finish - start = 0.065$

Рис.3 Результаты использования метода Крылова.

Исходя из вычислений характеристическое уравнение имеет следующий вид:

$$\lambda^4 - 13.6\lambda^3 + 51.96\lambda^2 - 67.08\lambda + 21.936 = 0$$

Временной результат отработки алгоритма: **0.065**.

МЕТОД ЛЕВЕРРЬЕ

Данный метод основан на формулах Ньютона для сумм степеней корней алгебраического уравнения.

Пусть

$$D(\lambda) = \lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - p_2\lambda^{n-2} - \cdots - p_n \qquad (9)$$

характеристический многочлен матрицы A и $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$- полная совокупность его корней, где каждый корень повторяется столько раз, какова его кратность.

Обозначим $S_k = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \cdots + \lambda_n^k$, $k = 1,2, \dots, n$. Тогда при $k \le n$ справедливы формулы Ньютона:

$$k \cdot p_k = S_k - p_1 S_{k-1} - \cdots - p_{k-1} S_1, k = 1,2, \dots, n \quad (10)$$

При известных числах S_k решая рекуррентную систему (10) можно найти коэффициенты p_k:

$$\begin{cases} p_1 = S_1 \\ p_2 = -\frac{1}{2}(S_2 - p_1 S_{1)} \\ \dots \\ p_n = -\frac{1}{n}(S_n - p_1 S_{n-1} - \cdots - p_{n-1} S_1) \end{cases} \qquad (11)$$

$$S_k = Tr\, A^k, k = 1,2, \dots, n \qquad (12)$$

Степени $A^k = A^{k-1} \cdot A$ находятся непосредственным перемножением.

В итоге схема метода Леверрье заключается в следующем: в начале вычисляются $A^k, k = 1,2, \dots, n$- степени заданной матрицы A, далее находятся S_k- суммы элементов главных диагоналей матриц A^k и по формулам (11) определяются искомые коэффициенты $p_k, k = 1,2, \dots, n$.

Далее на рисунке (рис.4) приведены результаты использования метода Леверрье:

start := время(0)

$a_{11} := 1.9 \quad a_{12} := 1.6 \quad a_{13} := 1.7 \quad a_{14} := 1.8$

$a_{21} := 1.6 \quad a_{22} := 2.9 \quad a_{23} := 1.6 \quad a_{24} := 1.3$

$a_{31} := 1.7 \quad a_{32} := 1.6 \quad a_{33} := 3.9 \quad a_{34} := 1.4$

$a_{41} := 1.8 \quad a_{42} := 1.3 \quad a_{43} := 1.4 \quad a_{44} := 4.9$

$$E := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_1 := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$p_1 := a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} = 13.6$$

$$B_1 := A_1 - p_1 E = \begin{pmatrix} -11.7 & 1.6 & 1.7 & 1.8 \\ 1.6 & -10.7 & 1.6 & 1.3 \\ 1.7 & 1.6 & -9.7 & 1.4 \\ 1.8 & 1.3 & 1.4 & -8.7 \end{pmatrix}$$

$$A_2 := A_1 B_1 = \begin{pmatrix} -13.54 & -9.02 & -8.18 & -7.78 \\ -9.02 & -24.22 & -6.34 & -2.42 \\ -8.18 & -6.34 & -30.42 & -1.58 \\ -7.78 & -2.42 & -1.58 & -35.74 \end{pmatrix}$$

$$p_2 := \frac{1}{2}[-13.54 + (-24.22) + (-30.42) + (-35.74)] = -51.96$$

$$B_2 := A_2 - p_2 E = \begin{pmatrix} 38.42 & -9.02 & -8.18 & -7.78 \\ -9.02 & 27.74 & -6.34 & -2.42 \\ -8.18 & -6.34 & 21.54 & -1.58 \\ -7.78 & -2.42 & -1.58 & 16.22 \end{pmatrix}$$

$$A_3 := A_1 B_2 = \begin{pmatrix} 30.656 & 12.112 & 8.088 & 7.856 \\ 12.112 & 52.724 & 0.936 & -0.908 \\ 8.088 & 0.936 & 57.744 & -0.552 \\ 7.856 & -0.908 & -0.552 & 60.116 \end{pmatrix}$$

$$p_3 := \frac{1}{3}(30.656 + 52.724 + 57.744 + 60.116) = 67.08$$

$$B_3 := A_3 - p_3 E = \begin{pmatrix} -36.424 & 12.112 & 8.088 & 7.856 \\ 12.112 & -14.356 & 0.936 & -0.908 \\ 8.088 & 0.936 & -9.336 & -0.552 \\ 7.856 & -0.908 & -0.552 & -6.964 \end{pmatrix}$$

$$A_4 := A_1 B_3 = \begin{pmatrix} -21.936 & 1.856 \times 10^{-13} & 2.741 \times 10^{-13} & 1.972 \times 10^{-13} \\ 2.842 \times 10^{-13} & -21.936 & 2.781 \times 10^{-13} & 1.936 \times 10^{-13} \\ 3.268 \times 10^{-13} & 2.218 \times 10^{-13} & -21.936 & 2.238 \times 10^{-13} \\ 3.908 \times 10^{-13} & 2.416 \times 10^{-13} & 3.446 \times 10^{-13} & -21.936 \end{pmatrix}$$

$$p_4 := -21.936$$

finish := время(0)

calc_time := finish − start = 0.106

Рис.4 Результаты использования метода Леверрье.

Исходя из вычислений характеристическое уравнение имеет следующий вид:

$$\lambda^4 - 13.6\lambda^3 + 51.96\lambda^2 - 67.08\lambda + 21.936 = 0$$

Временной результат отработки алгоритма: **0.106**

Результаты исследования быстродействия алгоритмов поиска коэффициентов характеристического уравнения представлены в таблице (табл.1).

Табл.1 Результаты исследования быстродействия алгоритмов поиска коэффициентов характеристического уравнения

ИСПОЛЬЗОВАННЫЙ МЕТОД	РЕЗУЛЬТАТ
Формула	**0.113**
Данилевского	**0.097**
Крылова	**0.065**
Леверрье	**0.106**

Методы Данилевского и Леверрье хоть и показали достаточно хорошие результаты учитывая факт отсутствия использования встроенных в систему Mathcad функций, тем не менее достаточно сложны с точки зрения реализации вне компьютера и без особого усложнения алгоритма их реализация в системе не только зависит от входных данных но и промежуточных, которые приходится вносить отдельно после изменения данных на входе. Более того, существуют и некоторые ограничения, связанные с использованием данных методов, как например проблема с невозможностью деления на ноль в первом и значением $n > 10$ во втором соответственно [3].

Другие два способа отличаются универсальностью алгоритмов, которые зависят только от входных данных, при изменении которых ответ меняется автоматически без внесения промежуточных значений. С точки зрения быстродействия выполнения метод Крылова является наиболее оптимальным в реализации в использованной в рамках исследования среде, но не стоит забывать об использовании в алгоритме встроенной функции (Isolve) заменяющей пошаговое решение системы алгебраических уравнений. Очевидно, что при использовании данного метода вне компьютера все же придется проделывать это без встроенного “помощника”.

В итоге, использование формулы интуитивно понятнее и проще для применения без вычислительной машины, но также прекрасно подходит и для написания алгоритма. Метод Крылова достаточно сложен в реализации без участия ЭВМ, но прост и является самым “быстрым” алгоритмом из исследуемых в выбранной среде Mathcad 15.

Библиографический список:

1. W.E. Arnoldi The principle of minimized iteration in the solution of the matrix eigenproblem Quart. Appl. Math., 9 (1951), pp. 17-29.
2. Долгополов Д. В. Методы нахождения собственных значений и собственных векторов матриц: Методические указания. СПб., СПбГТИ(ТУ), 2005. - 39 с. – Режим доступа: URL: http://sa.technolog.edu.ru/files/chumakov/Sobstvennye%20znachenija.pdf (Дата обращения 05.01.2020).
3. Сидоров А.А. Вопросы нахождения коэффициентов характеристического уравнения матрицы большой размерности в курсе линейной алгебры для студентов технических вузов Стр.302. Российская научно-техническая конференция с международным участием. Инновационные технологии в электронике и приборостроении. Сборник докладов конференции «Инновационные технологии в электронике и приборостроении» Физико-технологического института РТУ МИРЭА. — М.: РТУ МИРЭА, 2020. — Т. 1. — 526 с.