УДК 372.851 **Психолого-педагогические науки**

Маркова Светлана Иосифовна, *ст. преподаватель кафедры теории и методики обучения математике и ИКТ в образовании,*
ФГБОУ ВО «Петрозаводский государственный университет»
Баяндурян Аделина Васильевна, *преподаватель,*
ГАПОУ РК «Петрозаводский автотранспортный техникум»

СИСТЕМАТИЗАЦИЯ ЗНАНИЙ УЧАЩИХСЯ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ НА ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ О ТРЁХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРАХ

Аннотация: В статье раскрываются вопросы систематизации знаний, учащихся по геометрии при решении задач на применение теоремы о трех перпендикулярах. Средством систематизации выступает специально сконструированная система задач.

Ключевые слова: систематизация знаний, задачи по стереометрии, теорема о трёх перпендикулярах.

Annotation: The article reveals the issues of systematization of student’s knowledge in geometry when solving problems on the application of the three-perpendicular theorem. The systematization tool is a specially designed system of tasks.

Keywords: knowledge systematization, stereometric problems, the theorem on three perpendiculars.

Задачи по стереометрии являются неотъемлемой частью контрольно измерительных материалов единого государственного экзамена по математике. Умение решать задачи подобного типа - важный показатель овладения выпускниками определенной совокупностью математических знаний, показатель развития его пространственного и логического мышления.

Различные аспекты проблемы обучения решению стереометрических задач рассмотрены во многих психолого-педагогических и методических исследованиях (Е.А. Автоян [1], Г.Л. Глейзер [2], В.А. Далингер [3], О.В. Шереметьева [5], Д.А. Шукуров [6] и др.). Однако, несмотря на большое внимание к решению стереометрических задач в теоретических исследованиях и практике преподавания геометрии в школе, эти задачи продолжают оставаться для учащихся одними из самых трудных математических задач.

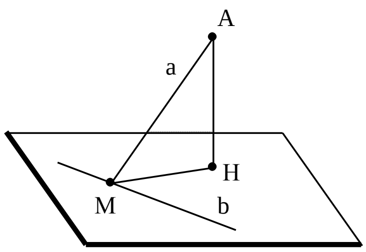
Среди многообразия стереометрических задач можно выделить большую группу задач, в решении которых применяется теорема о трёх перпендикулярах. Такие задачи в последние годы достаточно часто встречаются в контрольно-измерительных материалах ЕГЭ по математике профильного уровня (задание 14). Теорема о трёх перпендикулярах в этих задачах выступает как обоснование дополнительного построения, либо обоснование одного из умозаключений в цепочке доказательства, либо обоснование вычислений.

Исследуя решения задач на применение теоремы о трёх перпендикулярах, было также обнаружено, что круг таких задач содержательно достаточно обширный, в ходе их решения используются разные стереометрические и планиметрические факты школьного курса геометрии.

Мыслительная деятельность, в процессе которой изучаемые объекты организуются в определенную систему на основе выбранного принципа, в педагогическом энциклопедическом словаре [4] трактуется, как понятие «систематизация».

Всё выше сказанное говорит об актуальности темы исследования, целью которого является выявление возможности и средства систематизации знаний, учащихся по геометрии при решении задач на применение теоремы о трёх перпендикулярах.

Теорема о трёх перпендикулярах: наклонная перпендикулярна к прямой b тогда и только тогда, когда ее проекция перпендикулярна к прямой b (рис.1) – является одной из основных теорем курса стереометрии.



$$b \perp AM \Leftrightarrow b \perp HM$$

Рис.1

Применение этой теоремы при решении стереометрических задач имеет свои особенности.

Во-первых, в данной теореме идет речь о трёх перпендикулярах. AH – это перпендикуляр к плоскости, а значит, к прямой b. HM – это проекция, перпендикулярная к прямой b. AM – это наклонная, перпендикулярная к прямой b.

Во-вторых, приём применения теоремы о трёх перпендикулярах состоит из трех шагов:

1. Выделить наклонную к плоскости, ее проекцию на эту плоскость и определить первый перпендикуляр;
2. Определить второй перпендикуляр;
3. Сделать вывод о третьем перпендикуляре.

В-третьих, чтобы применить теорему о трёх перпендикулярах, надо иметь два перпендикуляра. Они могут быть даны в условии задачи, можно построить перпендикуляр, как дополнительное построение или доказать перпендикулярность. От этого зависит сложность задачи.

Кроме того, сложность в применении теоремы о трёх перпендикулярах возникает в случае негоризонтального расположения плоскости и в случае, когда прямая в плоскости не проходит через основание наклонной.

В-четвертых, данная теорема применяется в задачах разного вида:

- на доказательство;
- на нахождение расстояний и углов в пространстве;
- на построение (построение линейного угла искомого двухгранного угла).

В-пятых, круг задач на применение теоремы о трёх перпендикулярах содержательно достаточно обширный, в ходе их решения используются разные стереометрические и планиметрические факты школьного курса геометрии.

Рассмотрим перечисленные выше особенности применения теоремы о трех перпендикуляров на конкретных примерах.

Пример 1. (ЕГЭ – 2018)

В цилиндре на окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A и B, а на окружности другого основания — точки B_1 и C_1, причём BB_1 — образующая цилиндра, а AC_1 пересекает его ось цилиндра. Докажите, что угол $C_1BA = 90°$.

Решение.

Пусть точка C проекция точки C_1 на нижнее основание (рис.2). Тогда AC — проекция AC_1 на плоскость нижнего основания. Так как AC_1 пересекает ось цилиндра, то и AC тоже.

Следовательно, AC является диаметром окружности, а $\angle ABC = 90^0$, так как опирается на него.

CB является проекцией C_1B. Тогда C_1B перпендикулярно AB по теореме о трёх перпендикулярах, то есть $\angle C_1BA = 90^0$.

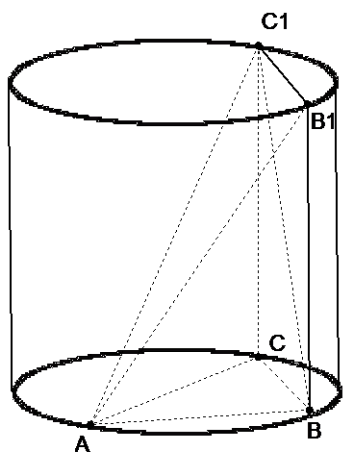


Рис.2

Пример 2.

Все рёбра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину 6. Точки M и N — середины рёбер AA_1 и A_1C_1 соответственно. а) Докажите, что прямые BM и MN перпендикулярны. б) Найдите угол между плоскостями BMN и ABB_1.

Решение.

Рассмотрим решение пункта (б) с использованием факта из пункта (а).

В этой задаче требуется найти угол между плоскостями. Углом между плоскостями называется угол между перпендикулярами к линии их пересечения, проведенными в этих плоскостях**.** Поэтому ищем два перпендикуляра к BM (рис.3).

Один перпендикуляр в плоскости BMN рассмотрен в пункте (а): $NM \perp BM$.

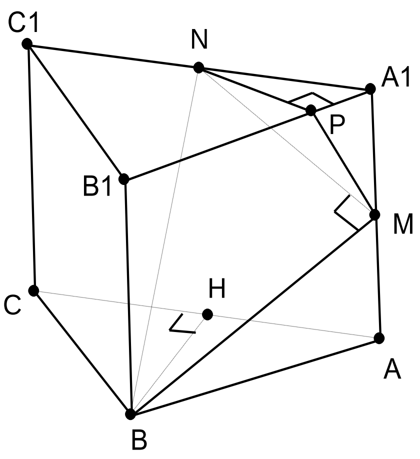


Рис. 3

Второй перпендикуляр к BM должен лежать в плоскости ABB_1.

Если выполнить дополнительное построение: $NP \perp A_1B_1$, то $NP \perp ABB_1$ и PM является проекцией NM на плоскость ABB_1.

Прямая BM перпендикулярна MN, тогда по теореме о трёх перпендикулярах $BM \perp MP$. Следовательно, угол NMP — линейный угол искомого угла.

Сложность представленных задач обусловлена тремя факторами:

- требуется выполнить дополнительное построение;

- необходимо предварительно доказать перпедикулярность двух прямых (в примере 1: $\angle ABC = 90^0$; во 2 примере: $NM \perp BM$);

- плоскость, относительно которой рассматривается теорема о трёх перпендикулярах, расположена вертикально (пример 2).

Для доказательства перпендикулярности двух прямых при этом могут быть использованы разные приёмы:

- теорема Пифагора (пример 2);

- вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности (пример 1) и др.

Таким образом, в процессе решения задач устанавливаются связи между блоками знаний, обосновывающих действия, которые входят в прием решения этих задач [1]. Следовательно, геометрические знания организуются в определенную систему, происходит систематизация знаний.

Средством систематизации геометрических знаний в данном исследовании выступает специально сконструированная система задач на применение теоремы о трёх перпендикулярах. Особенности применения теоремы о трёх перпендикулярах при решении задач позволили сформулировать следующие требования к такой системе задач:

- соблюдение принципа от простого к сложному;
- включение задач разного вида (на вычисление, на доказательство, на построение);
- включение задач на применение прямой и обратной теоремы о трех перпендикулярах;
- варьирование представления задач на готовом чертеже или текстом условий;
- неоднократное использование известных фактов и приёмов, установление новых связей между ними.

Учитывая эти требования, задачи на применение теоремы о трех перпендикулярах были скомпонованы в отдельные серии.

1 серия задач представляет собой одношаговые задачи на прямое или обратное применение теоремы о трех перпендикулярах. В условиях задач явно выделены два перпендикуляра, требуется доказать перпендикулярность двух прямых (третий перпендикуляр). Решая задачи данной серии, превращаем теорему о трех перпендикулярах в новое средство решения стереометрических задач. А, чтобы иметь возможность сосредоточить внимание учащихся на главной цели и не тратить время и силы на выполнение чертежа, задачи даются на готовых чертежах.

Задачи 1 серии направлены на систематизацию геометрических фактов, приёмов выполнения действий, связанных с разделами «Прямые и плоскости в пространстве» и «Многоранники».

2 серия задач – это двух- трёх- шаговые задачи на готовых чертежах или сформулированные в виде текста. В них сначала требуется доказать перпендикулярность двух прямых (используются различные приёмы доказательства перпендикулярности на плоскости и в пространстве), а затем применить теорему о трех перпендикулярах.

3 серия содержит задачи, в которых теорема о трех перпендикулярах применяется в нестандартных ситуациях (в случае негоризонтального расположения плоскости и в случае, когда прямая в плоскости не проходит через основание наклонной).

В ***4 серии задач*** теорема о трех перпендикулярах в явном виде не видна, теорема о трех перпендикулярах выступает как метод решения задач на нахождение расстояний и углов в пространстве (пример 1 и 2).

Как показала практика, целенаправленная работа по выявлению связей между геометрическими знаниями, которая осуществлялась с помощь созданной системы задач на применение теоремы о трёх перпендикулярах, влияет на повышение качества решения стереометрических задач. Таким образом, разработанная система задач может быть использована для систематизации геометрических знаний школьников или студентов, для подготовки к единому государственному экзамену по математике профильного уровня.

Библиографический список:

1. Автоян Е.А. Методика систематизации знаний учащихся при решении стереометрических задач / Автореферат дисс…канд.пед.наук: 13.00.02. – С-Пб, 1992. – 16 с.

2. Глейзер Г.Д. Развитие пространственных представлений школьников при обучении геометрии. - Москва: Педагогика, 1978. – 104 с.

3. Далингер В.А. Методика обучения стереометрии посредством решения задач 2-е изд.: учеб. Пособие для академического бакалавриата / В.А. Далингер —Москва: Юрайт, 2017. —370 с.

4. Педагогический энциклопедический словарь / Гл.ред. Б.М.Бим-Бад. – Большая Российская энциклопедия, 2008. – 528 с.

5. Шереметьева О.В. Обучение решению стереометрических задач с учетом взаимосвязи образного и логического компонентов мышления (на примере задач на подвижные сечения многогранников) / Автореферат дисс…канд.пед.наук: 13.00.02. – С-Пб, 1997. – 17 с.

6. Шукуров Д.А. Педагогические особенности формирования систематизированных знаний, учащихся: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.01. - Душанбе, 2006. - 157 с.