УДК 37 **Педагогические науки**

Воистинова Гузель Хамитовна, *кандидат педагогических наук, доцент кафедры «Фундаментальная математика», Стерлитамакский филиал ФГБОУ ВПО «Башкирский Государственный университет», г. Стерлитамак, Россия*

Байназарова Милана Рустемовна, *студентка 4 курса, факультет математики и информационных технологий, Стерлитамакский филиал ФГБОУ ВПО «Башкирский Государственный университет», г. Стерлитамак, Россия*

ТРИГОНОМЕТРИЯ ТРЕХГРАННЫХ УГЛОВ И СФЕРИЧЕСКИХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Аннотация: В статье определяются понятия «трехгранный угол» и «сферический треугольник», приводится тригонометрия трехгранного угла на основе теоремы синусов, а также определяется взаимосвязь между сферическим треугольником и трехгранным углом.

Ключевые слова: трехгранный угол, сферический треугольник, теорема синусов, угол, грань, ребро.

Abstract: The article defines the concepts of "three-sided angle" and "spherical triangle", gives trigonometry of the three-sided angle based on the sinus theorem, and defines the relationship between the spherical triangle and the three-sided angle.

Keywords: polynomial, trihedral angle, spherical triangle, sine theorem, angle, face, edge.

Аналогами плоских углов в стереометрии считаются двугранные углы, в то время как трехгранные углы являются аналогами плоских треугольников.

Для того, чтобы определить трехгранный угол можно воспользоваться следующей схемой (Рис. 1):

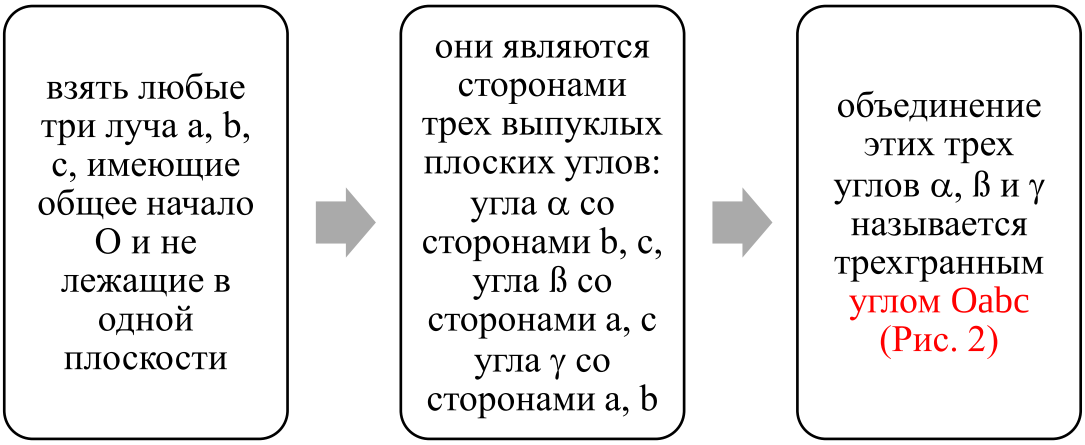

Рис. 1. Схема определения трехгранного угла

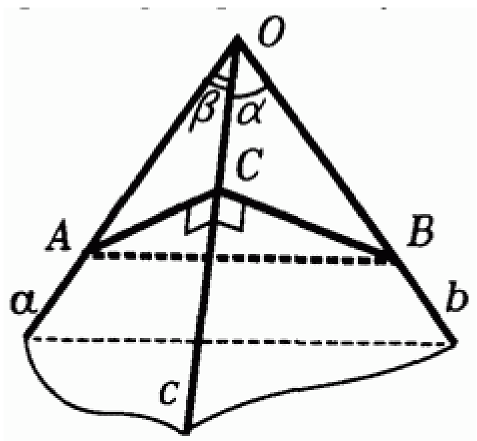

Рис. 2. Определение трехгранного угла

На чертеже (Рис. 2) можно заметить, что элементами трехгранного угла являются:

1) Три грани α, ß и γ трехгранного угла Oabc;

2) Три двугранных угла при ребрах a, b, c;

3) Величины α, ß, γ и $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$.

Для того, чтобы записать тригонометрию трехгранных углов, выразим одни элементы трехгранного угла через другие.

Итак, выведем аналог теоремы синусов [1, с. 146]:

$$\cos\gamma = \cos\alpha \times \cos\beta + \sin\alpha \times \sin\beta \times \cos\hat{c}$$

найдем $\cos\hat{c}$ и подставим его в равенство $sin^2\hat{c} = 1 - cos^2\hat{c}$, благодаря чему получаем следующее:

$$sin^2\hat{c} = 1 - cos^2\hat{c} = 1 - \frac{(cos\,\gamma - cos\,\alpha \times cos\,\beta)^2}{sin^2\,\alpha \times sin^2\,\beta} = \frac{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha \times \cos\beta \times \cos\gamma}{sin^2\,\alpha \times sin^2\,\beta}$$

Поделив на $sin^2\widehat{\gamma}$, получаем равенство:

$$\frac{sin^2\hat{c}}{sin^2\gamma} = \frac{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha \times \cos\beta \times \cos\gamma}{sin^2\,\alpha \times sin^2\,\beta \times sin^2\gamma} \quad (1)$$

Его правая часть симметрична относительно величин α, ß, γ. Следовательно, если так же вычислить отношения $\frac{sin^2\hat{a}}{sin^2\alpha}$ и $\frac{sin^2\hat{b}}{sin^2ß}$, то справа получим то же выражение, что и в (1). Поэтому эти отношения равны, а так как входящие в них синусы все положительные, то получаем следующий аналог теоремы синусов для трехгранного угла:

$$\frac{sin\hat{a}}{sin\alpha} = \frac{sin\hat{b}}{sinß} = \frac{sin\hat{c}}{sin\gamma}$$

Далее определим, что такое сферический треугольник, для этого воспользуемся следующей схемой (Рис. 3):

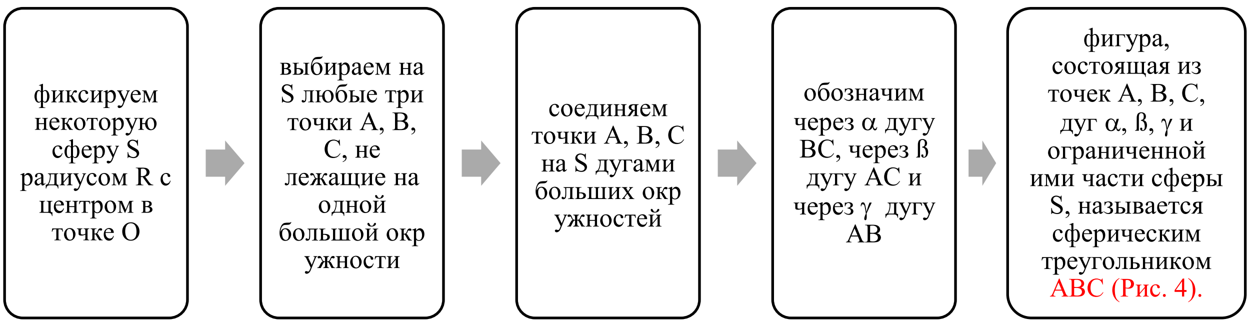

Рис. 3. Схема определения сферического треугольника

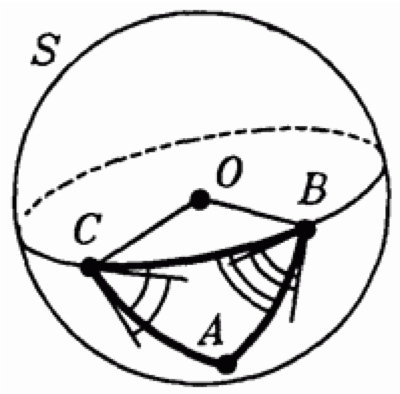

Рис. 4. Сферический треугольник

Между треугольниками на сфере S и трехгранными углами с вершиной в центре O сферы S естественным образом устанавливается взаимно однозначное соответствие: каждому такому треугольнику ABC соответствует трехгранный угол OABC, ребра которого a, b, c проходят через вершины треугольника, и, наоборот, каждый трехгранный угол с вершиной в точке O «вырезает» на сфере S (Рис. 5) сферический треугольник [2, с. 213].

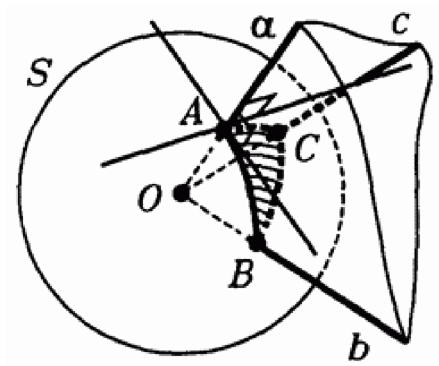

Рис. 5. Взаимодействие сферического треугольника и трехгранных углов

На чертеже (Рис. 5) замечаем соответствие между элементами сферического треугольника и соответствующими им элементами трехгранного угла:

1) Поскольку касательные к окружности являются перпендикулярными радиусам, которые проведены к точке касания, можно заметить соответствие углов сферического треугольника с двухгранными углами трехгранного угла, вырезающего в сфере сферический треугольник.

$\angle A = \hat{a}$; $\angle B = \hat{b}$; $\angle C = \hat{c}$.

2) Поскольку произведение величины центрального угла радиан на радиус – это длина дуги окружности, значит, что стороны α, ß, γ сферического треугольника ABC выражаются через величины углов граней $\alpha 0$, ß0, $\gamma 0$ соответствующего трехгранного угла по следующим формулам:

$\alpha = R\alpha 0$, ß = Rß0, $\gamma = R\gamma 0$.

На основе равенств, полученных ранее, а также доказанной теоремы синусов получаем теорему, подходящую для сферических треугольников [3, с. 38]:

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{R}}{sinA} = \frac{\sin\frac{\beta}{R}}{sin\beta} = \frac{\sin\frac{\gamma}{R}}{sinC}.$$

Таким образом, трехгранные углы имеют взаимосвязь со сферическими треугольниками.

Библиографический список:

1. Александров А.Д. Стереометрия. Геометрия в пространстве: Учеб. пособие для уч. ст. кл. и абитуриентов / А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик. – М.: Висагинас, Alfa, 2015. – 576 с.

2. Александров А.Д. Геометрия: учебник / А.Д. Александров, Н.Ю. Нецветаев. – 2-е изд., исправленное. – СПб.: БХВ-Петербург, 2015. – 624 с.

3. Старова О.А. Сферическая геометрия // Грани математики. – 2015. – №5 (17). – С. 35-38.