УДК 51 **Математические науки**

Маркова Светлана Иосифовна, *ст. преподаватель кафедры методики обучения математике и информационно-коммуникационным технологиям в образовании, ФГБОУ ВО «Петрозаводский государственный университет», г. Петрозаводск, Россия*

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИЕМОВ ПЕРЕФОРМУЛИРОВАНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

Аннотация: В статье рассматривается прием переформулирования для решения геометрических задач с требованием доказать, что три точки лежат на одной прямой, показано использование этого приема при решении задач ЕГЭ по математике профильного уровня типа задания 16.

Ключевые слова: прием переформулирования, три точки на одной прямой, поиск решения задачи.

Abstract: The article discusses the method of reformulation for solving geometric problems with the requirement to prove that three points lie on one straight line, shows the use of this technique in solving problems of the unified state exam in mathematics of the profile level of the task type 16.

Keywords: the technique of reformulation, three points on one straight line, search for a solution to the problem.

Среди сложных геометрических задач в контрольно-измерительных материалах ЕГЭ по математике встречаются задачи, в которых рассматривается взаимное расположение точек, прямых и окружностей. Это задачи, в которых требуется доказать, что три точки лежат на одной прямой, либо три прямые пересекаются в одной точке, либо четыре точки лежат на одной окружности. Такие задачи трудны, прежде всего, своим требованием. Ни в школьных учебниках, ни на уроках не уделяется специального внимания вопросам о том, какие приемы существуют для доказательства перечисленных фактов.

Решая любую геометрическую задачу, сначала ученик должен понять условие задачи: расшифровать смысл терминов, заменить понятие его характеристическим свойством, уточнить смысл логических связок и т.п. По сути, происходит переформулирование текста задачи.

Особое значение переформулирование имеет на этапе поиска решения задачи. Одним из приемов переформулирования здесь является прием равносильного преобразования требования задачи. Сущность этого приема заключается в замене требования на новое эквивалентное утверждение, облегчающее решение исходной задачи.

Рассмотрим прием переформулирования на примере задач с требованием доказать, что три точки лежат на одной прямой.

Так как через любые две точки можно провести прямую, и притом только одну, то требование «доказать, что три точки лежат на одной прямой» в задачах может быть сформулировано по-разному:

- Три точки лежат на прямой;
- Точка лежит на прямой;
- Прямая проходит через данную точку;
- Два отрезка лежат на одной прямой;
- Три точки коллинеарны.

Исходя из того, что все эти формулировки равносильны, одно из этих требований задачи может быть переформулировано в другое ещё на первом этапе решения задачи при краткой записи условия задачи, что дает первичное раскрытие требования.

Приемы переформулирования, которые позволяют увидеть путь решения задачи с таким требованием и теоремы, на которых основаны эти приемы, были выделены ранее в работе [1]:

1) ищем развернутый угол;
2) ищем совпадающие углы;

3) ищем вертикальные углы;

4) ищем две прямые, параллельные (перпендикулярные) одной прямой;

5) ищем расстояния между точками;

6) теорема Менелая.

Чтобы выбор приема переформулирования был целенаправленным, можно использовать следующие признаки их выбора. Первое и пятое переформулирования используются, если известны градусные меры углов, составляющих рассматриваемый угол или длины отрезков, соединяющих каждую пару точек. Второе и третье переформулирование наиболее часто встречаются в задачах с таким требованием. В четвертом случае признаки достаточно очевидны и просматриваются из чертежа. И последнее переформулирование используется, если мы находимся в условиях теоремы Менелая.

В качестве примера рассмотрим решение нескольких задач уровня ЕГЭ по математике профильного уровня (задание 16).

Задача 1. [2]

Дан квадрат *ABCD*. На сторонах *AB* и *BC* внешним и внутренним образом соответственно построены равносторонние треугольники *ABK* и *BCP* (Рис.1).

а) Докажите, что точка *P* лежит на прямой *DK*.

б) Найдите площадь четырехугольника *PKBC*, если известно, что *AB*=2.

Поиск решения пункта а):

В задаче требуется доказать, что точка *P* лежит на прямой *DK*, что равносильно требованию доказать, что три точки *P, D* и *K* лежат на одной прямой.

Заметим, что чертеж к задачам с таким требованием полезно выполнять так, чтобы данные три точки не лежали на одной прямой. Это позволит при решении задачи не использовать факты, которые еще требуется доказать.

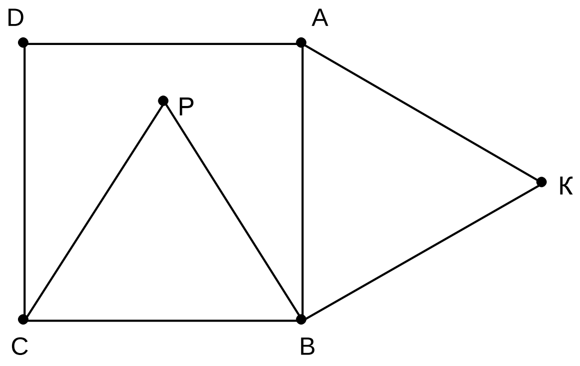

Рис.1

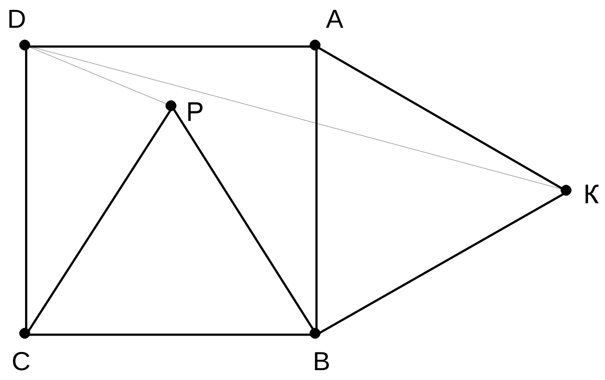

Рис.2

Попробуем воспользоваться приемом о совпадающих углах.

Точки *P* и *K* лежат по одну сторону от прямой *AD*, проходящей через третью точку *D*. Соединим точки *P* и *K* с точкой *D*. Получим два угла $\angle PDA$ и $\angle KDA$ (Рис.2). Докажем, что эти углы равны.

Итак, для решения задачи достаточно доказать, что два угла равны. Это можно сделать разными способами. Поскольку в условии задачи даны квадрат и равносторонние треугольники, то можно вычислить углы в равнобедренных треугольниках *ADK* и *CDP*.

Решение пункта а):

1. Δ *ADK* – равнобедренный

$$\angle KDA = \frac{1}{2}(180^0 - \angle KAD) = \frac{1}{2}(180^0 - 90^0 - 60^0) = 15^0$$

2. Δ *CDP* – равнобедренный

$$\angle PDC = \frac{1}{2}(180^0 - \angle PCD) = \frac{1}{2}(180^0 - (90^0 - 60^0)) = 75^0$$

3. $\angle PDA = 90^0 - \angle PDC = 90^0 - 75^0 = 15^0 = \angle KDA$

4. Так как $\angle PDA = \angle KDA$ и они отложены по одну сторону от прямой *AD*, то эти углы совпадают и точки *P, D* и *K* лежат на одной прямой.

Задача 2. [2]

В трапеции *ABCD* с боковыми сторонами *AB* = 8 и *CD* = 5 биссектриса угла *B* пересекает биссектрисы углов *A* и *C* в точках *M* и *N* соответственно, а биссектриса угла *D* пересекает те же две биссектрисы в точках *L* и *K*, причем точка *L* лежит на основании *BC*.

а) Докажите, что прямая MK проходит через середину стороны AB.

б) Найти отношение $KL : MN$, если $LM : KN = 4 : 7$.

Поиск решения пункта а):

В задаче требуется доказать, что прямая MK проходит через середину стороны AB (обозначим буквой E середину стороны AB). Это требование равносильно тому, что прямая MK проходит через точку E или, что три точки M, K и E лежат на одной прямой.

Исходя из параллельности противоположных сторон BC и AD трапеции, можно предположить, что отрезки MK и EM им тоже параллельны (Рис.3). Докажем это.

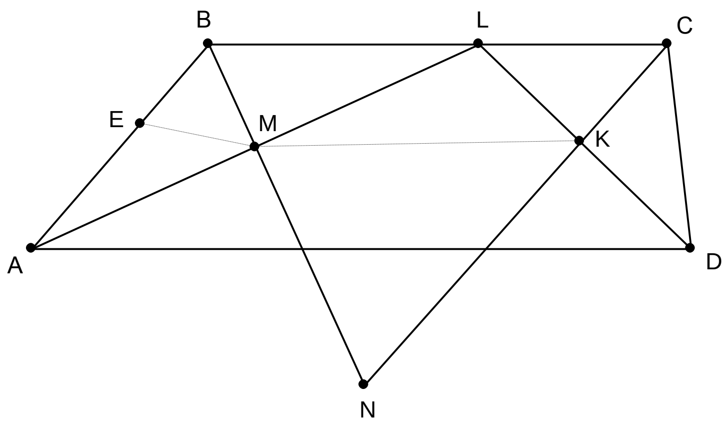

Рис.3

Поскольку в условии задачи точка E - середина AB, то для доказательства параллельности EM основаниям трапеции, достаточно установить, что это средняя линия треугольника ABL. Соответственно точка M должна быть серединой AL.

Для того, чтобы доказать, что M - середина AL, достаточно установить, что BM – медиана треугольника ABL. Но BM – биссектриса угла ABL. Значит, треугольник ABL должен быть равнобедренным, т.е. надо доказать либо равенство его сторон, либо равенство углов при основании.

Аналогично, требуется доказать, что K – середина DL.

Решение пункта а):

1. $BC \parallel AD$. Значит, $\angle ALB = \angle LAD$ и $\angle CLD = \angle ADL$, как накрест лежащие углы.

2. Тогда $\angle BAL = \angle BLA$, $\angle CDL = \angle CLD$. Значит, ΔABL и ΔCLD равнобедренные ($AB = BL$, $CL = CD$).

3. Тогда биссектрисы этих треугольников BM и CK являются также медианами. Значит, точки M и K - середины сторон AL и DL соответственно.

4. M и K - середины сторон AL и DL Значит, MK - средняя линия ΔALD. Тогда $MK \parallel AD$.

5. Так как M и E - середины сторон AL и AB, то ME – средняя линия ΔABL. Тогда $EM \parallel BL$, а значит $EM \parallel AD$.

6. Так как $MK \parallel AD$ и $EM \parallel AD$ (параллельны одной прямой), то точки M, K и E лежат на одной прямой.

Решая такого сорта задачи, поведение ученика на этапе поиска становится грамотным: сначала ученик обращает внимание на требование задачи и, таким образом, видит цель, которую требуется достичь. Затем переформулирует это требование, переходя к его равносильной, но более привычной, понятной форме, а далее выбирает прием, с помощью которого можно получить необходимый вывод. Благодаря наличию такого плана создаются условия для успешной деятельности ученика на этапе поиска решения задачи.

Библиографический список:

1. Бертуева С.И. Приемы переформулирования геометрических задач как средство систематизации знаний / С.И. Бертуева // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. - 2002. - № 4. - С. 149-154.

2. Сайт Ларина А.А. Режим доступа: https://alexlarin.net/ege20.html.

3. Митина Т.П. Использование приема переформулирования на разных этапах решения задачи / Т.П. Митина // Евразийский Союз Ученых. - 2016. - №7(28). - С.76-77.