

*Люосев Виктор Владимирович, студент 2 курс, нефтегазовый факультет,
Ухтинский государственный технический университет,
Пармузина Мария Семеновна, научный руководитель,
доцент кафедры высшей математики Ухтинский государственный
технический университет, кандидат педагогических наук
Россия, г. Ухта*

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация: Решение дифференциальных уравнений является важной и сложной задачей, возникающей при математическом моделировании различных технических задач. Поэтому в статье рассматриваются численные методы решения дифференциальных уравнений, которые являются универсальным методом решения большинства дифференциальных уравнений. Наиболее известными из таких методов являются метод Эйлера и метод Рунге-Кутты. В статье подробно изучены эти два метода и реализовано решение задач в редакторе MS Excel. Также рассмотрено решение дифференциальных уравнений численным методом в программе Mathcad.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, задача Коши, численные методы, метод Эйлера, метод Рунге-Кутты, программа Mathcad.

Annotation: The solution of differential equations is an important and complex problem that arises in the mathematical modeling of various technical problems. Therefore, the article considers numerical methods for solving differential equations, which are a universal method for solving most differential equations. The most well-known of these methods are the Euler method and the Runge-Kutta method. The article examines these two methods in detail and implements the solution of problems in the

MS Excel editor. The solution of differential equations by the numerical method in the Mathcad program is also considered.

Key words: differential equations, Cauchy problem, numerical methods, Euler method, Runge-Kutta method, Mathcad program.

Дифференциальные уравнения являются основой огромного количества расчетных задач из самых различных областей науки и техники. Поэтому инженеру-исследователю в своей научной деятельности приходится сталкиваться с решением ДУ различной сложности.

Дифференциальные уравнения – это уравнения, в которых неизвестными являются *функции* одной или нескольких переменных. Эти уравнения включают соотношения между искомыми функциями и их производными. Если в уравнения входят производные только по одной переменной, то они называются обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ). Если уравнение содержит функцию нескольких независимых переменных и ее частные производные, то говорят об уравнении *в частных производных*. Решить дифференциальное уравнение – значит, *определить неизвестную функцию* на определенном интервале изменения ее переменных.

В курсе высшей математики в техническом вузе мы изучили некоторые виды ДУ и методы их решений. Также известно, что не все дифференциальные уравнения имеют аналитическое (точное) решение, а иногда для получения аналитического решения ДУ нужны большая изобретательность и знания специальных формул и методов математики. Поэтому при решении достаточно часто применяются численные методы, позволяющие свести решение дифференциальных уравнений к последовательности алгебраических операций над числами, которую можно реализовать с помощью компьютерных программ. Эти методы можно применить к широкому классу ДУ, поэтому эти методы можно назвать универсальными. Основным недостатком численных методов решения дифференциальных уравнений считают то, что численными методами можно найти только частное решение задачи.

Обыкновенное дифференциальное уравнение или система ОДУ имеет *единственное* решение, если, помимо уравнения, определенным образом заданы *дополнительные* условия. В зависимости от вида дополнительных условий различают 2 основных типа задач для обыкновенных дифференциальных уравнений:

1) задачи Коши, для которых определены начальные условия на искомые функции, т. е. заданы значения этих функций в начальной точке интервала интегрирования уравнения;

2) краевые задачи, для которых заданы определенные соотношения сразу на обеих границах интервала.

В нашей работе мы подробнее остановимся на решении задачи Коши для ОДУ численными методами. Рассмотрим метод Эйлера и метод Рунге-Кутты, реализуем их с помощью MS Excel. Кроме этого, рассмотрим решение дифференциальных уравнений в программе MathCAD, в которой нет символьного (точного) решения ДУ, но достаточно хорошо представлены численные методы их решения (в частности, метод Рунге-Кутты).

Известно, что обыкновенное дифференциальное уравнение n -го порядка при помощи замены переменной можно привести к эквивалентной системе n уравнений первого порядка. Поэтому, решив ДУ первого порядка, это решение можно будет обобщить и на случай дифференциального уравнения n -го порядка.

Например, дифференциальное уравнение 2-го порядка $y'' = g(y', y, x)$ можно заменить эквивалентной системой ДУ 1-го порядка:

$$\begin{cases} z' = g(z, y, x), \\ y' = z, \end{cases} \quad \text{где } z \text{ – новая переменная.}$$

То есть, получена система уравнений относительно y и z . Решение этой системы даст и искомую функцию, и ее производную.

Решить задачу Коши численно – значит, для заданной последовательности значений аргумента (узлов) $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ и числа y_0 (значение искомой функции в начальной точке x_0), не находя самого решения $y = \varphi(x)$, приближенно вычислить значения $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ этого решения в остальных узлах. Таким

образом, численное решение задачи Коши позволяет вместо отыскания точного решения в виде формулы $y = \varphi(x)$ получить таблицу значений этой функции.

Таблица 1. Таблично заданная функция

| | | | | | |
|----------------|-------|-------|-------|-----|-------|
| x_i | x_0 | x_1 | x_2 | ... | x_n |
| $\varphi(x_i)$ | y_0 | y_1 | y_2 | ... | y_n |

Наиболее простым методом решения дифференциальных уравнений является метод Эйлера. Рассмотрим его подробнее.

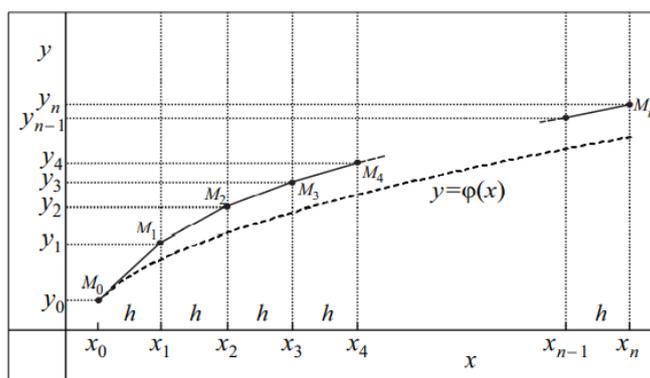


Рисунок 1. Реализация метода Эйлера

Рассмотрим решение задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка: $y' = f(x, y)$ при начальных условиях $y(x_0) = y_0$.

Метод Эйлера основан на разложении функции y в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 : $y(x_0 + h) \approx y(x_0) + h \cdot y'(x_0) + \frac{1}{2} \cdot h^2 \cdot y''(x_0) + \dots$

Полагая, что h мало, в методе Эйлера пренебрегают членами второго и высших порядков: $y(x_0 + h) \approx y(x_0) + h \cdot y'(x_0)$.

Для решения задачи Коши вводят на отрезке $[a; b]$ равномерную сетку:

$$\Omega_n \{x_0 = a, x_i = x_{i-1} + h, i = 1, 2, \dots, n-1, x_n = b, h = (b-a)/n\},$$

где $i=0, 1, 2, \dots, n$ – номер узла; h – шаг сеточной области. Обозначим через $y(x_i)$ точное решение, а через y_i – приближённое решение задачи в одинаковых узлах сетки.

Запишем уравнение касательной к графику искомой функции следующим образом: $y = y_0 + (x - x_0) \cdot f(x_0, y_0)$.

Рассмотрим точку $M_1(x_1, y_1)$ пересечения прямой $x=x_1=x_0+h$ и касательной. При достаточно малом шаге h ордината точки M_1 , определённая по формуле: $y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$, мало отличается от ординаты $y(x_1)$ решения задачи в точке x_1 . И точку M_1 можно принять приближённо за новую начальную точку, а через неё вновь проводить прямую, параллельную касательной к $y=y(x)$ в точке $(x_1, y(x_1))$: $y = y_1 + (x - x_1) \cdot f(x_1, y_1)$.

Находя точку пересечения этой прямой и прямой $x=x_2$, получим приближённое значение искомой функции $y=y(x)$ для $x=x_2$: $y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1)$.

Продолжая этот процесс, получим рекуррентную формулу для вычисления приближённого решения задачи Коши на сеточной области:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i), \quad i=0, 1, \dots, n-1, \quad y(x_0) = y_0.$$

Это простейший численный метод решения дифференциальных уравнений, но сравнительно грубый и применяется на практике в основном для ориентировочных расчётов. Ошибка этого метода имеет порядок h^2 .

Метод Рунге-Кутты является одним из методов повышенной точности. В отличие от метода Эйлера, в методе Рунге-Кутты в ряде Тейлора учитываются члены до четвёртого порядка:

$$y(x_0 + h) \approx y(x_0) + h \cdot y'(x_0) + \frac{1}{2} \cdot h^2 \cdot y''(x_0) + \frac{1}{6} \cdot h^3 \cdot y'''(x_0) + \frac{1}{24} \cdot h^4 \cdot y^{IV}(x_0)$$

Строится равномерная сетка Ω_n с шагом h и рассматриваются числа – угловые коэффициенты касательных, проведённых к определяющим точкам

$$\text{искомой функции: } \begin{cases} k_1^{(i)} = h \cdot f(x_i, y_i) \\ k_2^{(i)} = h \cdot f(x_i + h/2, y_i + k_1^{(i)}/2) \\ k_3^{(i)} = h \cdot f(x_i + h/2, y_i + k_2^{(i)}/2) \\ k_4^{(i)} = h \cdot f(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}) \end{cases}, \quad (i=0, 1, \dots, n).$$

Последовательные значения функции вычисляются по формуле:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \text{ где } \Delta y_i = \frac{1}{6} \cdot (k_1^{(i)} + 2 \cdot k_2^{(i)} + 2 \cdot k_3^{(i)} + k_4^{(i)}), i=0, 1, 2, \dots, n.$$

Метод Рунге-Кутта обладает значительной точностью порядка h^5 и, несмотря на некоторую трудоёмкость, широко используется при численном решении ДУ с помощью ЭВМ.

Формулы Рунге-Кутта для системы 2 обыкновенных ДУ первого порядка можно получить аналогично. Рассмотрим систему $\begin{cases} y' = f_1(x, y, z), \\ z' = f_2(x, y, z), \end{cases}$ на отрезке $[a; b]$ с начальными условиями $y(a) = y_0, z(a) = z_0$.

Напишем формулы метода Рунге-Кутта для системы 2 уравнений:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6, \\ z_{i+1} = z_i + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6, \end{cases} \quad x_{i+1} = x_i + h,$$

$$\text{где } \begin{cases} k_1 = h \cdot f_1(x_i, y_i, z_i), & l_1 = h \cdot f_2(x_i, y_i, z_i), \\ k_2 = h \cdot f_1(x_i + h/2, y_i + k_1/2, z_i + l_1/2), \\ l_2 = h \cdot f_2(x_i + h/2, y_i + k_1/2, z_i + l_1/2), \\ k_3 = h \cdot f_1(x_i + h/2, y_i + k_2/2, z_i + l_2/2), \\ l_3 = h \cdot f_2(x_i + h/2, y_i + k_2/2, z_i + l_2/2), \\ k_4 = h \cdot f_1(x_i + h, y_i + k_3, z_i + l_3), \\ l_4 = h \cdot f_2(x_i + h, y_i + k_3, z_i + l_3). \end{cases}$$

Последовательно вычисляются на каждом шаге $k_1, l_1, k_2, l_2, k_3, l_3, k_4, l_4$, а затем $y_{i+1}, z_{i+1}, x_{i+1}$. Во всех вариантах $i=0, 1, 2, \dots, n-1$.

В MathCAD нет универсальной функции для решения дифференциальных уравнений, а есть около 20 функций для различных видов уравнений, дополнительных условий и методов решения. Эти функции можно найти в библиотеке Insert/Function, категория «Differential Equation Solving» [1].

Для численного интегрирования ОДУ в MathCAD имеется выбор – использовать либо вычислительный блок Given/Odesolve, либо встроенные функции. Оба способа обладают одинаковыми возможностями, но при использовании блока решения запись уравнений более привычна и наглядна.

Однако отдельная функция может быть использована в составе других функций и программ, что бывает удобно при решении большой задачи.

Вычислительный блок Given/Odesolve для решения одного ОДУ состоит из трех частей: ключевое слово given; ОДУ и начальные условия, записанные с помощью логического равенства; встроенная функция Odesolve (x, b) относительно независимой переменной x на интервале $[a, b]$; b – верхняя граница отрезка интегрирования. Допустимо и даже предпочтительнее задание функции Odesolve ($a, b, step$) с 3 параметрами, где $step$ – внутренний параметр численного метода, определяющий количество шагов. Чем больше $step$, тем с лучшей точностью будет получен результат, но тем больше времени будет затрачено на его поиск.

Функция Odesolve возвращает решение задачи в виде функции. Эта функция не имеет символьного представления и может только вернуть численное значение решения уравнения в любой точке интервала интегрирования. Функция Odesolve использует для решения ДУ наиболее популярный алгоритм Рунге-Кутты четвертого порядка. Он обеспечивает малую погрешность для широкого класса систем ОДУ.

Приведем примеры решения дифференциального уравнения, используя описанные выше методы. Решим задачу Коши аналитически, а также численными методами Эйлера, Рунге-Кутты и с помощью системы Mathcad. Проведем анализ полученных решений.

Пример 1. Уравнение $y' = y - y^2$ при начальных условиях $y(0) = 0,1$ на отрезке $[0; 5]$.

Аналитическое решение данного уравнения не составит большого труда для человека, знающего основные методы решения дифференциальных уравнений. Применим метод разделения переменных:

$\frac{dy}{dx} = y - y^2 \Rightarrow \frac{dy}{y - y^2} = dx \Rightarrow \ln \left| \frac{y}{1 - y} \right| = x + C$. Учитывая начальные условия, найдем

параметр C : $\ln\left|\frac{0,1}{1-0,1}\right|=0+C \Rightarrow C=\ln\frac{1}{9}$. Тогда получим точное частное решение:

$$\ln\left|\frac{y}{1-y}\right|=x+\ln\frac{1}{9} \Rightarrow \ln\left|\frac{9y}{1-y}\right|=x \Rightarrow \frac{9y}{1-y}=e^x \Rightarrow y=\frac{e^x}{9+e^x}.$$

Применим для решения этого уравнения метод Эйлера.

Выберем шаг $h = 0,5$ и разобьем отрезок $x \in [0; 5]$ на части. Получили 10 отрезков дробления. Из начального условия знаем, что $y_0 = 0,1$. Далее последовательно вычислим приближенные значения решения y_{i+1} .

Для этого составим несложную расчетную таблицу в Excel (рисунок 1).

| h | 0,5 | |
|----|-----|-----------|
| n | Xi | Yi(h=0,5) |
| 0 | 0 | 0,1 |
| 1 | 0,5 | 0,145 |
| 2 | 1 | 0,206988 |
| 3 | 1,5 | 0,289059 |
| 4 | 2 | 0,391811 |
| 5 | 2,5 | 0,510959 |
| 6 | 3 | 0,635899 |
| 7 | 3,5 | 0,751665 |
| 8 | 4 | 0,844997 |
| 9 | 4,5 | 0,910486 |
| 10 | 5 | 0,951236 |

Рисунок 2. Реализация метода Эйлера при $h = 0,5$

Для того чтобы уточнить корень, уменьшим шаг дробления вдвое ($h = 0,25$) и вычислим значения приближенного решения y_{i+1} . В этом случае получили уже 20 отрезков дробления. Сравним полученные значения со значениями, полученными в предыдущем шаге, – вычислим процент расхождения.

| =100*ABS(1-K9/G8) | | | | | |
|-------------------|-------------|-------------------|---|---|--------------------------|
| | I | J | K | L | M |
| h | 0,25 | | | | % отличия с h=0,5 |
| n | Xi | Yi(h=0,25) | | | |
| 0 | 0 | 0,1 | | | |
| 1 | 0,25 | 0,1225 | | | |
| 2 | 0,5 | 0,149373 | | | 3,016163793 |
| 3 | 0,75 | 0,181139 | | | |
| 4 | 1 | 0,218221 | | | 5,426925447 |
| 5 | 1,25 | 0,260871 | | | |
| 6 | 1,5 | 0,309075 | | | 6,924389376 |
| 7 | 1,75 | 0,362462 | | | |
| 8 | 2 | 0,420233 | | | 7,253820775 |
| 9 | 2,25 | 0,481142 | | | |
| 10 | 2,5 | 0,543553 | | | 6,378999687 |
| 11 | 2,75 | 0,605579 | | | |
| 12 | 3 | 0,665292 | | | 4,622304119 |
| 13 | 3,25 | 0,720962 | | | |
| 14 | 3,5 | 0,771256 | | | 2,606354913 |
| 15 | 3,75 | 0,815361 | | | |
| 16 | 4 | 0,852998 | | | 0,946817072 |
| 17 | 4,25 | 0,884346 | | | |
| 18 | 4,5 | 0,909915 | | | 0,062625273 |
| 19 | 4,75 | 0,930408 | | | |
| 20 | 5 | 0,946595 | | | 0,487927816 |

Рисунок 3. Реализация метода Эйлера при $h = 0,25$

Процент отклонения в некоторых точках превышает 5%, поэтому необходимо продолжить уменьшение шага дробления. Рассмотрим шаг дробления $h = 0,125$ и вычислим значения приближенного решения y_{i+1} . В этом случае получили уже 40 отрезков дробления.

| $f_x = \$T7+\$S\$5*(T7-T7^2)$ | | | | | |
|-------------------------------|--------------|--------------------|---|---|----------------------------|
| | R | S | T | U | V |
| h | 0,125 | | | | % отличия от h=0,25 |
| n | Xi | Yi(h=0,125) | | | |
| 0 | 0 | 0,1 | | | |
| 1 | 0,125 | 0,11125 | | | |
| 2 | 0,25 | 0,12360918 | | | 0,905452806 |
| 3 | 0,375 | 0,137150423 | | | |
| 4 | 0,5 | 0,151942947 | | | 1,720191442 |
| 31 | 3,875 | 0,839115836 | | | |
| 32 | 4 | 0,855990892 | | | 0,350904511 |
| 33 | 4,125 | 0,871399702 | | | |
| 34 | 4,25 | 0,885407485 | | | 0,120048273 |
| 35 | 4,375 | 0,898090119 | | | |
| 36 | 4,5 | 0,909530651 | | | 0,042285287 |
| 37 | 4,625 | 0,919816232 | | | |
| 38 | 4,75 | 0,929035523 | | | 0,147486631 |
| 39 | 4,875 | 0,937276588 | | | |
| 40 | 5 | 0,944625236 | | | 0,208093845 |

Рисунок 4. Реализация метода Эйлера при $h = 0,125$

По сравнению с предыдущим шагом отклонения оказались меньше 5%, поэтому на этом шаге можно остановиться.

Проведем сравнительный анализ всех решений методом Эйлера с точным решением, построим графики и вычислим процент отклонения.

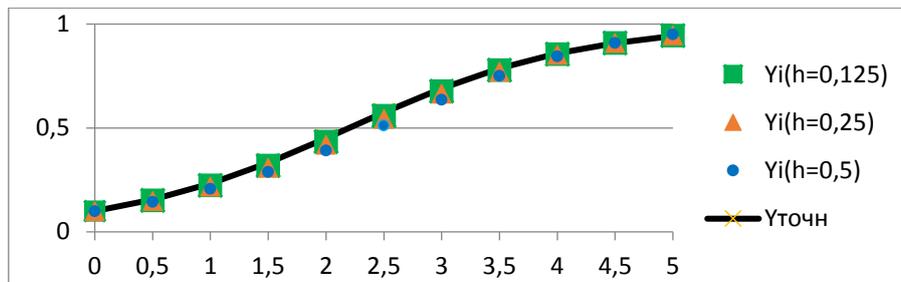


Рисунок 5. Точное и приближенные решения

Таблица отклонений приближенных значений y_i , полученных методом Эйлера в узлах, от точных значений решения задачи Коши выглядит следующим образом.

Таблица 2. Таблица отклонений приближенных значений

| x_i | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 | 4,5 | 5 |
|-----------------|----|-----|-----|-----|-----|-----|----|-----|----|-----|----|
| $y_i (h=0,5)$ | 0% | 6% | 11% | 13% | 13% | 11% | 8% | 4% | 2% | 0% | 1% |
| $y_i (h=0,25)$ | 0% | 4% | 6% | 7% | 7% | 5% | 4% | 2% | 1% | 0% | 0% |
| $y_i (h=0,125)$ | 0% | 2% | 3% | 4% | 3% | 3% | 2% | 1% | 0% | 0% | 0% |

Видим, что при $h = 0,125$ отклонения от точного решения меньше 5 %. Если уменьшить шаг дробления еще в два раза, то точность будет еще выше.

Вычислим методом Рунге-Кутты с $h = 0,5$. Расчетная таблица будет выглядеть чуть сложнее.

$y' = y - y^2$

| h | 0,5 | | | | | | | | |
|----|-------|--------------|-----------|----------|----------|----------|----------|------------|--|
| n | X_i | $Y_i(h=0,5)$ | $X_i+h/2$ | k1 | k2 | k3 | k4 | ΔY | |
| 0 | 0 | 0,1 | 0,25 | 0,045 | 0,053747 | 0,055388 | 0,065621 | 0,054815 | |
| 1 | 0,5 | 0,154815 | 0,75 | 0,065424 | 0,07618 | 0,077846 | 0,089265 | 0,077124 | |
| 2 | 1 | 0,231939 | 1,25 | 0,089072 | 0,100018 | 0,101227 | 0,111083 | 0,100441 | |
| 3 | 1,5 | 0,33238 | 1,75 | 0,110952 | 0,118712 | 0,119139 | 0,123825 | 0,118413 | |
| 4 | 2 | 0,450793 | 2,25 | 0,123789 | 0,12492 | 0,124912 | 0,122134 | 0,124265 | |
| 5 | 2,5 | 0,575058 | 2,75 | 0,122183 | 0,115732 | 0,116166 | 0,106717 | 0,115449 | |
| 6 | 3 | 0,690507 | 3,25 | 0,106854 | 0,095248 | 0,096647 | 0,083771 | 0,095736 | |
| 7 | 3,5 | 0,786243 | 3,75 | 0,084033 | 0,071123 | 0,073221 | 0,060393 | 0,072186 | |
| 8 | 4 | 0,858428 | 4,25 | 0,060765 | 0,049413 | 0,051604 | 0,040937 | 0,050623 | |
| 9 | 4,5 | 0,909051 | 4,75 | 0,041339 | 0,03267 | 0,034523 | 0,026621 | 0,033725 | |
| 10 | 5 | 0,942775 | 5,25 | 0,026975 | 0,020912 | 0,022291 | 0,016857 | 0,021706 | |

Рисунок 6. Реализация метода Рунге-Кутты при $h = 0,5$

Можем заметить, что метод Рунге-Кутта дает достаточно хорошую точность уже при первом шаге $h=0,5$.

Реализация решения данного дифференциального уравнения в Mathcad приведена ниже.

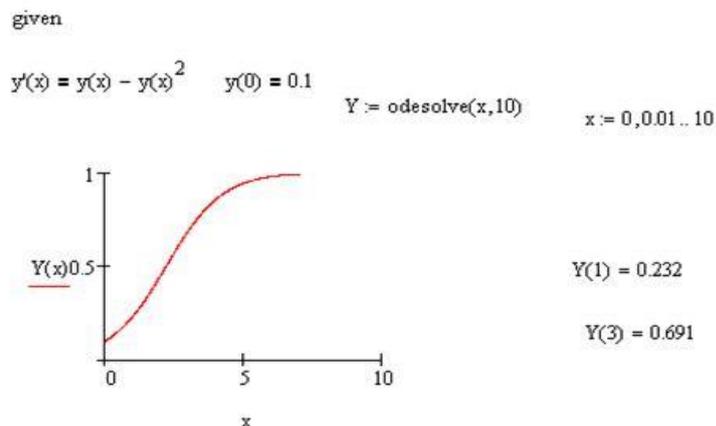


Рисунок 9. Решение задачи Коши в Mathcad

Решение уравнения в Mathcad полностью совпадает с решением, полученным методом Рунге-Кутта.

Таким образом, можем заключить, что наиболее быстрое решение дифференциального уравнения мы получили с помощью системы Mathcad, но и реализация метода Рунге-Кутта в MS Excel не составляет большого труда. Составив программу расчета в MS Excel для одного ДУ, можно легко исправить ее и применять для решения других ДУ.

Решим еще несколько ДУ методом Рунге-Кутта.

Пример 2. Уравнение $y' = \sin x - x \cdot y$ при начальных условиях $y(0) = 0$ на отрезке $[0; 10]$. Выберем шаг $h=0,1$.

Получим аналогичную предыдущему решению таблицу значений из 100 строк. По полученным значениям построим графическое изображение.

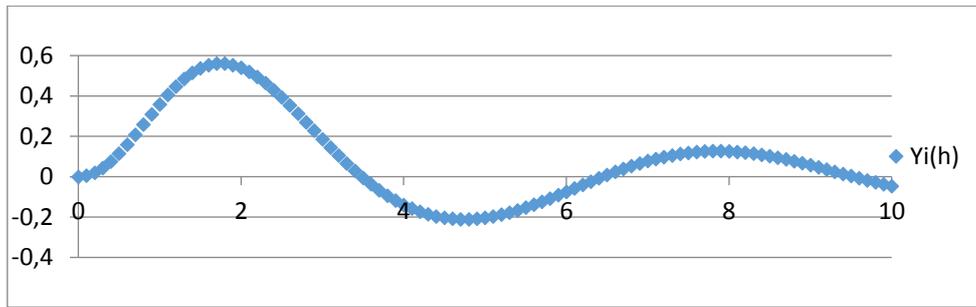


Рисунок 10. Приближенное решение методом Рунге-Кутта

| E6 fx =SB\$4*(SIN(B6)-B6*C6) | | | | | | | | | |
|--------------------------------------|--------------------------|-----|----------|--------|-----|----------|----------|----------|----------|
| Пример 2 * x | | | | | | | | | |
| A | B | C | D | E | F | G | H | I | |
| 1 | Метод Рунге-Кутта | | | | | | | | |
| 2 | dy/dx=SIN(x)-x*y, y(0)=1 | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | |
| 4 | h | 0,1 | | | | | | | |
| 5 | n | Xi | Yi(h) | Xi+h/2 | k1 | k2 | k3 | k4 | ΔY |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0,05 | 0,0 | 0,00500 | 0,00499 | 0,00993 | 0,00498 |
| 7 | 1 | 0,1 | 0,00498 | 0,15 | 0,0 | 0,01479 | 0,01476 | 0,01947 | 0,01475 |
| 8 | 2 | 0,2 | 0,01974 | 0,25 | 0,0 | 0,02400 | 0,02395 | 0,02824 | 0,02394 |
| 9 | 3 | 0,3 | 0,04367 | 0,35 | 0,0 | 0,03227 | 0,03220 | 0,03591 | 0,03218 |
| 10 | 4 | 0,4 | 0,07585 | 0,45 | 0,0 | 0,03928 | 0,03920 | 0,04219 | 0,03917 |
| 11 | 5 | 0,5 | 0,11503 | 0,55 | 0,0 | 0,04478 | 0,04471 | 0,04688 | 0,04468 |
| 99 | 93 | 9,3 | 0,02512 | 9,35 | 0,0 | -0,01091 | -0,01092 | -0,01088 | -0,01091 |
| 00 | 94 | 9,4 | 0,01421 | 9,45 | 0,0 | -0,01081 | -0,01085 | -0,01071 | -0,01082 |
| 01 | 95 | 9,5 | 0,00339 | 9,55 | 0,0 | -0,01060 | -0,01067 | -0,01045 | -0,01062 |
| 02 | 96 | 9,6 | -0,00723 | 9,65 | 0,0 | -0,01029 | -0,01039 | -0,01009 | -0,01033 |
| 03 | 97 | 9,7 | -0,01755 | 9,75 | 0,0 | -0,00989 | -0,01002 | -0,00963 | -0,00993 |
| 04 | 98 | 9,8 | -0,02748 | 9,85 | 0,0 | -0,00940 | -0,00955 | -0,00909 | -0,00945 |
| 05 | 99 | 9,9 | -0,03693 | 9,95 | 0,0 | -0,00882 | -0,00900 | -0,00846 | -0,00888 |
| 06 | 100 | 10 | -0,04582 | 10,05 | 0,0 | -0,00817 | -0,00838 | -0,00777 | -0,00824 |

Рисунок 11. Реализация метода Рунге-Кутта при $h = 0,1$

Пример 3. Решим методом Рунге-Кутта ДУ второго порядка $y'' + 5y' + 12,5y = 0$ при начальных условиях $y(0) = 1, y'(0) = 0$ на отрезке $[0; 5]$.

Данное уравнение является линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка. Решение не сложно найти по общеизвестным формулам: $y = e^{-\frac{5x}{2}} \left(\sin \frac{5x}{2} + \cos \frac{5x}{2} \right)$.

Для применения численного метода решения запишем данное уравнение в

виде системы:
$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = y'' = -5z - 12,5y, \\ y(0) = 1, z(0) = 0. \end{cases}$$

Решим методом Рунге-Кутта, выберем шаг $h=0,1$. Получим 50 шагов вычислений.

уфер обмена Шрифт Выравнивание Число Стили

Я6 $f_x = \$B\$1*(-5*16-12,5*C6)$

Пример 3 система * x

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N |
|----|----|-----|----------|------|----------|----------|----------|----------|----------|------|----------|----------|----------|----------|
| 1 | h | 0,1 | | | | | | | | | | | | |
| 2 | n | xi | yi | k1 | k2 | k3 | k4 | Δy | zi | i1 | i2 | i3 | i4 | Δz |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 0,0 | -0,06250 | -0,04688 | -0,09766 | -0,05273 | 0 | -1,3 | -0,93750 | -0,97656 | -0,70313 | -0,96354 |
| 4 | 1 | 0,1 | 0,94727 | -0,1 | -0,13147 | -0,11968 | -0,14671 | -0,12423 | -0,96354 | -0,7 | -0,46651 | -0,50351 | -0,30095 | -0,49055 |
| 5 | 2 | 0,2 | 0,82304 | -0,1 | -0,16050 | -0,15218 | -0,16217 | -0,15549 | -1,45409 | -0,3 | -0,13543 | -0,16758 | -0,02773 | -0,15592 |
| 6 | 3 | 0,3 | 0,66755 | -0,2 | -0,16247 | -0,15707 | -0,15575 | -0,15931 | -1,61001 | 0,0 | 0,07855 | 0,05248 | 0,14067 | 0,06222 |
| 7 | 4 | 0,4 | 0,50824 | -0,2 | -0,14785 | -0,14475 | -0,13670 | -0,14611 | -1,54780 | 0,1 | 0,20068 | 0,18083 | 0,22911 | 0,18846 |
| 8 | 5 | 0,5 | 0,36213 | -0,1 | -0,12458 | -0,12317 | -0,11183 | -0,12388 | -1,35934 | 0,2 | 0,25521 | 0,24107 | 0,26044 | 0,24667 |
| 9 | 6 | 0,6 | 0,23825 | -0,1 | -0,09834 | -0,09810 | -0,08585 | -0,09833 | -1,11267 | 0,3 | 0,26343 | 0,25413 | 0,25408 | 0,25795 |
| 10 | 7 | 0,7 | 0,13992 | -0,1 | -0,07285 | -0,07333 | -0,06174 | -0,07326 | -0,85472 | 0,3 | 0,24277 | 0,23730 | 0,22548 | 0,23968 |
| 11 | 8 | 0,8 | 0,06666 | -0,1 | -0,05029 | -0,05117 | -0,04111 | -0,05092 | -0,61504 | 0,2 | 0,20659 | 0,20399 | 0,18618 | 0,20526 |
| 12 | 9 | 0,9 | 0,01573 | 0,0 | -0,03172 | -0,03275 | -0,02459 | -0,03242 | -0,40979 | 0,2 | 0,16453 | 0,16392 | 0,14421 | 0,16439 |
| 13 | 10 | 1 | -0,01669 | 0,0 | -0,01736 | -0,01839 | -0,01217 | -0,01804 | -0,24540 | 0,1 | 0,12300 | 0,12366 | 0,10471 | 0,12360 |

Рисунок 12. Фрагмент реализации метода Рунге-Кутта при $h = 0,1$

Проведем сравнительный анализ решений методом Рунге-Кутта с точным решением, построим графики и вычислим процент отклонения.

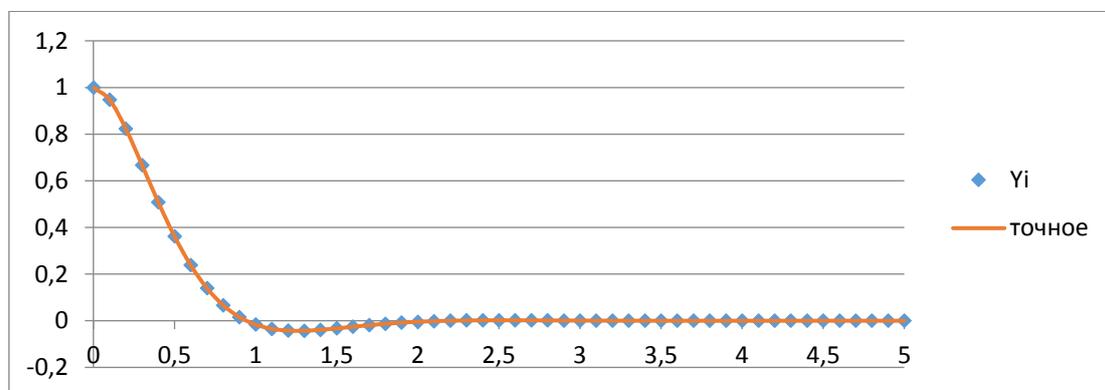


Рисунок 13. Точное и приближенное решения методом Рунге-Кутта

Таблица отклонений приближенных значений y_i , полученных методом Рунге-Кутта в узлах, от точных значений решения задачи Коши выглядит следующим образом.

Таблица 4. Таблица отклонений приближенных значений

| x_i | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 | 4,5 | 5 |
|---------------|-------|-------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|-------|
| $y_i (h=0,1)$ | 0,00% | 0,03% | 0,3% | 0,03% | 0,24% | 0,05% | 0,16% | 1,39% | 0,08% | 0,5% | 0,12% |

Процент отклонения достаточно маленький. Уменьшение шага приведет к возрастанию количества шагов, но позволит уменьшить процент отклонения. Реализация решения, данного ДУ 2-го порядка в Mathcad ниже [2].

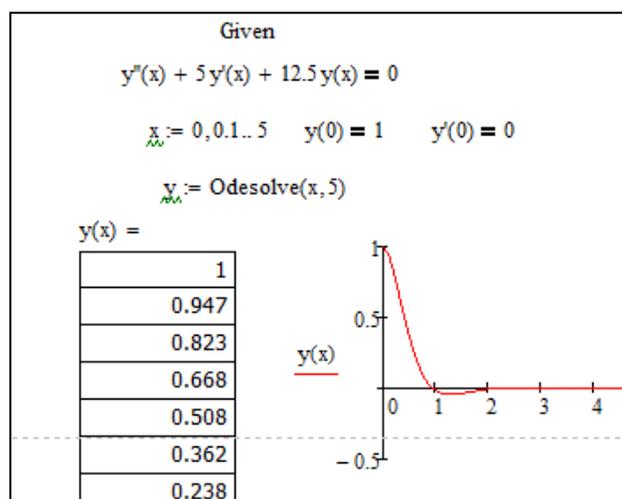


Рисунок 14. Решение задачи Коши в Mathcad

Таким образом, решение дифференциальных уравнений является сложной и важной задачей в научных исследованиях. Мы в своей работе рассмотрели наиболее распространенные методы, которые лежат в основе многих других более сложных методов. Для реализации приближенных методов решения удобно применять MS Excel и Mathcad, но необходимо иметь хорошие навыки по работе с данными программами, потому что самая минимальная допущенная ошибка может привести к большим ошибкам.

Библиографический список:

1. Численные методы решения задач строительства: учеб. пособие: в 2 ч. Ч. 1. / Г. Г. Кашеварова, Т.Б. Пермякова, М.Е. Лаищева. – Пермь: Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2015. – 161 с.
2. Тренировочные задачи и упражнения по математике для студентов технических вузов. Начала математического анализа: учебное пособие / М. С. Хозяинова, М. Г. Рочева, Е. В. Хабаева. – Ухта: УГТУ, 2018. – 220 с.