УДК 51 **Физико-математические науки**

Бушуева Виолетта Олеговна, *студент*
ФГБОУ ВО «Кубанский государственный аграрный университет
Имени И. Т. Трубилина», г. Краснодар
Сергеев Александр Эдуардович, *кандидат*
Физико-математических наук, доцент кафедры высшей,
Математики, ФГБОУ ВО «Кубанский государственный аграрный
университет имени И. Т. Трубилина», г. Краснодар

ЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИСКРЕТНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Аннотация: в статье приводится полный анализ линейной динамической модели дискретных математических систем. В частности, рассматриваются динамические уравнения Лагранжа на примере дискретной механической системы, параметры которой задаются в соответствии с общими положениями теории. Кроме того, в статье авторами составляются матричные уравнения динамики системы, что осуществляется на основании показателей, которые были получены в рамках анализ динамической системы. Отмечается, что составление матричных уравнений динамики системы представляется возможным после обобщения координат системы и составления функции кинетической и потенциальной энергии согласно инерционным упругим свойствам. На этой основе приводится вид системы уравнения Лагранжа, которые имеют вид матричной системы на первоначальном этапе составления и впоследствии. Также в представленной статье приводится решение уравнений динамики системы с ее последующим анализом. В рамках данного пункта акцентируется внимание на том, что для осуществления деятельности данного рода необходимо применять различные математические методы, в частности, преобразования Лапласа и операционные методы. Формулируется вывод о том, что впоследствии это дает нам вид линейной неоднородной системы уравнений.

Ключевые слова: уравнение Лангранжа, дискретная механическая система, потенциальные силы, диссипативные силы, уравнение динамики системы, диссипация.

Abstract: the article provides a complete analysis of the linear dynamic model of discrete mathematical systems. In particular, the dynamic Lagrange equations are considered on the example of a discrete mechanical system, the parameters of which are set in accordance with the general provisions of the theory. In addition, in the article, the authors compile matrix equations of the dynamics of the system, which is carried out on the basis of indicators that were obtained as part of the analysis of the dynamic system. It is noted that the compilation of matrix equations of system dynamics is possible after generalizing the coordinates of the system and compiling the kinetic and potential energy functions according to the inertial elastic properties. On this basis, the form of the Lagrange equation system is given, which have the form of a matrix system at the initial stage of compilation and subsequently. Also, the presented article provides a solution of the equations of the dynamics of the system with its subsequent analysis. Within the framework of this paragraph, attention is focused on the fact that in order to carry out activities of this kind, it is necessary to apply various mathematical methods, in particular, Laplace transformations and operational methods. The conclusion is formulated that subsequently this gives us the form of a linear inhomogeneous system of equations.

Keywords: Langrange equation, discrete mechanical system, potential forces, dissipative forces, equation of system dynamics, dissipation.

Динамические уравнения Лагранжа

Для полноты картины настоящего исследования стоит рассмотреть дискретную механическую систему, в которой имеют место стационарные голономные связи и положение в пространстве которой является однозначным и задается конечным числом обобщенных координат x_k как функций времени *t*.

Число n указанных позиционных координат будет равно $x_k = x_k(t)$ и будет определять число степеней свободы системы, а именно, к=1,2, ..n. Укажем, что на элементы данной системы действуют какие-либо активные внешние силы $F_k^a(t)$ в направлении изменения координат, а работа данных координат на возможных перемещениях δx_k равна $\delta A = \sum_{k=1}^{n} F_k^a \delta x_k$. В случае, если заданные внешние силы считать заданными с законами изменения по времени (например, гармонический закон $F_k^a(t) = B_k Sin(\Omega t + b_k)$ с соответствующими амплитудами B_k, начальными фазами b_k и частотой изменения Ω), то внутренние силы надо будет рассматривать как линейную функцию от координат x_k и скоростей x_k элементов системы. Стоит отметить, что это весьма целесообразно при малых изменениях скоростей и координат элементов системы, а изменения координат мы будем рассматривать именно указанным образом.

Разделив внутренние силы F_k^b, которые действуют на элементы нашей системы на потенциальные F_k^{bn} и диссипативные F_k^{bd} составляющие, которые при линейном взаимодействии можно выразить как потенциальную $П(x_i)$ диссипативную $D(x_i)$ функции состояния системы

$$F_k^{bn} = \sum_{i=1}^{n} c_{ki} x_i = -\frac{\partial П}{\partial x_k} \qquad\qquad F_k^{bd} = \sum_{i=1}^{n} d_{ki} x_i = -\frac{\partial D}{\partial x_k}$$

Где c_{ki} и d_{ki} являются постоянными коэффициентами жесткости и диссипации соответственно. Стоит отметить, что потенциальная функция будет представлять собой потенциальную энергию системы, которая равна работе против потенциальных внутренних сил в рамках перевода системы из «нулевого» состояния в текущее состояние соответственно:

$$П(x_1, x_2, .. x_n) = \frac{1}{2} \sum c_{ij} x_i x_j \geq 0$$

Функция диссипации всегда выражает рассеяние энергии системы в связи с наличием в ней линейного трения. Представить данную функцию можно следующим образом:

$$D(x_1, x_2, ..x_n) = \frac{1}{2}\sum d_{ij} x_i x_j \geq 0$$

Важно акцентировать внимание на том, что не потенциальные внутренние силы включаются в состав внешних сил (с формальной точки зрения), в то время как потенциальные внешние силы включаются в состав потенциальной энергии системы. Отметим, что кинетическая энергия $T(x_i)$ механической системы находится в прямой зависимости от обобщенных скоростей и может быть представлена следующей квадратичной формой:

$$T(x_1, x_2, ..x_n) = \frac{1}{2}\sum m_{ij} x_i x_j \geq 0$$

где m_{ij} является постоянными коэффициентами инерции системы.

Составляем уравнение Лагранжа 2-го рода в целях описания механической системы и введем функцию Лагранжа $L = T - \Pi$. Динамические уравнения в данном случае будут иметь следующий вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial x_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_k} = F_k^a + F_k^{bd}$$

В связи с тем, что указанное уравнение является дифференциальным уравнением 2-го порядка, то указанная динамическая модель механической системы с n степенями свободы будет именоваться моделью порядка 2n, что в полной мере отвечает общепринятой классификации [2].

Составление матричных уравнений динамики системы

После того, как нами были выбраны обобщенные координаты системы и составлена функция потенциальной и кинетической энергии в полном соответствии с инерционными упругими диссипативными свойствами, систему уравнения Лагранжа стоит представить следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n} m_{ki} \ddot{x} + \sum_{i=1}^{n} d_{ki} \dot{x}_i + \sum_{i=1}^{n} c_{ki} x_i = F_k^a(t)$$

Внедрим основные обозначении векторов и матриц:

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ .. \\ x_n(t) \end{pmatrix} = (x_k(t)) \qquad \overline{F} = \begin{pmatrix} F_1^a(t) \\ F_2^a(t) \\ .. \\ F_n^a(t) \end{pmatrix} = (F_k^a(t))$$

-вектора обобщены координат и заданных внешних сил соответственно,

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & .. & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & .. & m_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ m_{n1} & m_{n2} & .. & m_{nn} \end{pmatrix} = (m_{ki})$$ - матрица инерции системы,

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & .. & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & .. & d_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ d_{n1} & d_{n2} & .. & d_{nn} \end{pmatrix} = (d_{ki})$$ - матрица диссипации в системе,

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & .. & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & .. & c_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ c_{n1} & c_{n2} & .. & c_{nn} \end{pmatrix} = (c_{ki})$$ - матрица жесткости системы.

После этого динамические уравнения будут записаны в матричном виде:

$$M\ddot{\overline{X}} + D\dot{\overline{X}} + C\overline{X} = \overline{F} \qquad (1)$$

Стоит отметить, что уравнения данного вида будут представлять собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которые относятся к уравнению n порядка, причем данная система будет неоднородной и иметь постоянные коэффициенты. Из теории дифференциальных уравнений следует, что в целях однозначного решения стоит дополнить данные уравнения определенными условиями, например, начальными условиями Коши:

$$\overline{X}(0) = \overline{X}_0 \text{ , } \dot{\overline{X}}(0) = \overline{V}_0 \text{ ,} \qquad (2)$$

Где $\overline{X}_0, \overline{V}_0$ заданные начальные положения и скорости элементов системы.

В целях определения структурных элементов матриц в уравнении (1), объективной необходимостью является составление функций потенциальной и кинетической энергии, равно как и диссипативной функции. Одновременно с этим, в целях нахождения определенных элементов матрицы жестокости C необходимо воспользоваться результатами статических расчетов. Так, пусть система находится в состоянии статического равновесия и имеет координаты $\overline{X}^c$. Для этого к ней стоит приложить постоянные удерживающие внешние силы $\overline{F}^c$, тогда (1) преобразуется в уравнение равновесии $C\overline{X}^c = \overline{F}^c$. Из данного уравнения явно следует, что коэффициенты жестокости будут равны внешним статическим силам, которые поддерживают равновесие системы на базе единичных перемещений. В частности, это будет иметь вид: $c_{ki} = F_k^c(X_{i1}^c)$ и будет равно внешней силе, которая обеспечивает единичное перемещение только в рамках координаты $x_i = 1$, где $X_{i1}^c = (0,0,..,1 = x_i,0,..0)$.

Если мы умножим уравнение (1) на M^{-1}, то мы сможем записать его в каноническом виде:

$$\ddot{\overline{X}} + D'\dot{\overline{X}} + C'\overline{X} = \overline{F}', \qquad (1a)$$

где $D' = M^{-1}D$, $C' = M^{-1}C$, приведенные матрицы диссипации и жесткости и приведенный вектор внешних сил. $\overline{F}' = M^{-1}\overline{F}$

Умножая уравнение (1) на матрицу C^{-1}, запишем его в обратной форме

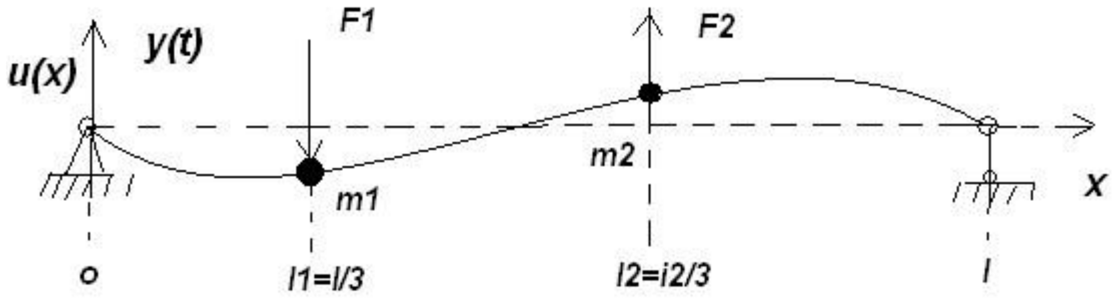
$$\hat{M}\ddot{\overline{X}} + \hat{D}\dot{\overline{X}} + \overline{X} = \hat{\overline{F}}, \qquad (1в)$$

Где $\hat{D} = C^{-1}D,\ \ \hat{M} = C^{-1}M$ приведенные матрицы диссипации и инерции и приведенный вектор внешних сил $\hat{\overline{F}} = C^{-1}\overline{F}$. Матрица $\alpha = C^{-1}$, будет являться обратной к матрице жесткости, а именовать ее следует как матрица податливости или матрица влияния. Данная матрица также может быть найдена на основе уравнения статического равновесия, имеющего вид: $\overline{X}^c = \alpha\overline{F}^c$. Коэффициент влияния $\alpha_{ki} = X_k^c(F_{i1}^c)$ в данном случае равен статическому перемещению по координате x_k от единичной внешней силы, которая действует только по координате x_i

$F_{i1}^c = (0,0,..,1 = F_i,0,..0)$.

<u>Пример [2].</u> Изучим малые поперечные колебания нескольких (двух) точечных масс, обозначенных как $m_1.,m_2$ и прикрепленных к шарнирно опертой балке длины l на расстояниях $l/3$ от опертых концов. Укажем, что данная балка невесома, она совершает изгибные колебания и может быть описана моделью

Бернулли с жестокостью EJ .



Координаты системы $y_1(t), y_2(t)$ в данном случае будут задавать малые поперечные смещения точечных масс. Смещения серединной линии балки $u(x)$ для невесомой балки должны быть определены по координатам масс на базе следующей краевой задачи:

$$EJu_{xxxx} = 0,$$

$$u|_{x=0} = 0,\ EJu_{xx}|_{x=0} = 0,\ u|_{x=l} = 0,\ EJu_{xx}|_{x=l} = 0,$$

$$u|_{x=l_1} = y_1,\ [u_x]_{x=l_1} = 0, [EJu_{xx}]_{x=l_1} = 0,$$

$$u|_{x=l_2} = y_2,\ [u_x]_{x=l_2} = 0,\ [EJ \cdot u_{xx}]_{x=l_2} = 0,$$

Стоит отметить, что для изогнутой оси балки решение находится в прямой зависимости от 12 констант, которые определяются из краевых условий и в полной мере позволяет определить потенциальную энергию упругой балки:

$$\Pi(y_1, y_2) = \int_0^l \frac{1}{2} EJu_{xx}^2 dx.$$

Одновременно с этим, намного проще вычисляются коэффициенты влияния, определить которые можно на фоне использования известного статического решения для изогнутой оси балки [1] от действия постоянной поперечной силы P_0 в точке приложения ξ

$$u(x,\xi) = \frac{P_0 x(l-\xi)}{6lEJ}(l^2 - x^2 - (l-\xi)^2),$$

Из которого, при $P_0 = 1$ и $l_1 = l/3, \quad l_2 = 2l/3$ можно получить при различных значениях x и ξ :

$$\alpha_{11} = u(x = l_1, \xi = l_1) = \frac{4}{243}\frac{l^3}{EJ}, \alpha_{12} = u(x = l_1, \xi = l_2) = \frac{7}{486}\frac{l^3}{EJ}$$
$$\alpha_{21} = u(x = l_{21}, \xi = l_1) = \frac{7}{486}\frac{l^3}{EJ}, \alpha_{22} = u(x = l_2, \xi = l_2) = \frac{4}{243}\frac{l^3}{EJ}.$$

Отсюда следует, что матрицы влияния и жестокости будут иметь следующий вид:

$$\alpha = \frac{1}{486}\frac{l^3}{EJ}\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad C = \alpha^{-1} = \frac{486}{15}\frac{EJ}{l^3}\begin{pmatrix} 8 & -7 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Кинетическая энергия системы и матрица будут определяться следующим образом:

$$T(\dot{y}_1, \dot{y}_2) = \frac{1}{2}(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2), \qquad M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}.$$

Стоит отметить, что если трением в рассматриваемой системы вполне можно пренебречь, то матрица $D = 0$, а динамические уравнения системы будут иметь следующий вид:

$$m_1\ddot{y}_1 + c_{11}y_1 + c_{12}y_2 = F_1$$
$$m_2\ddot{y}_2 + c_{21}y_1 + c_{22}y_2 = F_2$$

Решение и анализ уравнений динамики системы

Решение уравнений динамики системы (1) с начальными условиями (2) допускается решать с использованием весьма широкой совокупности методов, например, с помощью операционных методов интегральных преобразований Лапласа [3]. Впоследствии это имеет вид линейной неоднородной системы алгебраических уравнений, представить которые можно в следующем виде:

$$(Mp^2 + Dp + C)\breve{\bar{X}} = \breve{\bar{F}} + pX_0 + V_0, \tag{3}$$

где $\breve{\bar{X}}(p) = \int_0^\infty \bar{X}(t) \cdot e^{-pt}dt$ изображение искомой функции $\bar{X}(t)$, $\breve{\bar{F}}(p)$ изображение заданных сил $\bar{F}(t)$, а $p = s + i\sigma$ комплексная переменная.

Решение уравнения (3) можно осуществить на базе правила Крамера [5], в частности, в виде правильной дроби: $\breve{\bar{X}}(p) = \dfrac{\bar{\Delta}_{2n-1}(p)}{\Delta_{2n}(p)}$,

где $\Delta_{2n}(p) = \det(Mp^2 + Dp + C)$ главный определитель, который представляет собой многочлен степени $2n$, а $\overline{\Delta}_{2n-1}(p)$ представляет собой вектор вспомогательных определителей многочленов степени $2n-1$. Отметим, что обращение дроби данного типа согласно теоремой разложения вполне можно провести посредством разложения на сумму простейших дробей, которые имеют табличное значение. Одновременно с этим, в целях физического анализа решения, наиболее оптимальным будет являться метод так называемых «собственных чисел и собственных функций системы». Согласно данному методу, а также общей теории дифференциальных уравнений, решение уравнения (1) будет иметь вид:

$$\overline{X}(t) = \overline{X}_{собств}(t) + \overline{X}_{вынужд}(t), \, a \quad \overline{X}_{собств}(t) = \sum_{k=1}^{m} C_k \overline{X}_k^{б}(t), \tag{4}$$

где $\overline{X}_{собств}(t)$ это общее решение соответствующей однородной системы уравнений (1) с нулевой правой частью $\overline{F}(t) = 0,$ $\overline{X}_{к}^{б}(t)$ линейно-независимая система базисных решений однородных уравнений (1), а C_k это произвольно взятые константы, которые будут определяться дальше на основе начальных условий (2).

Так как однородные уравнения в полной мере соответствуют тому, что внешние силы, приложенные к механической системе отсутствуют, данная часть решения именуется в качестве свободного движения механической системы.

В свою очередь, вторая часть решения $\overline{X}_{вынужд}(t)$ будет представлять собой частное решение неоднородных уравнений (1) и вполне может именоваться в качестве вынужденного решения, так как данная часть решения во многом предопределена действием заданных внешних сил $\overline{F}(t) \neq 0$.

В связи с этим, стоит провести поиск системы собственных базисных решений однородных уравнений (1), имеющего следующий вид:

$$\overline{X}_{к}^{б}(t) = \overline{L} \cdot e^{\lambda t},$$

где λ является произвольной константной, и будет образовываться произвольный вектор констант $\overline{L} = (l_j)$. Данные значения стоит подбирать таким образом, что данное решение в полной мере удовлетворяло однородным уравнениям (1). Подставив его в уравнение, получим:

$$(M\lambda^2 + D\lambda + C)\cdot \bar{L} = \bar{0} \qquad (5)$$

Ненулевое решение указанного однородного уравнения допустимо только при условии того, что λ будет являться корнями в рамках следующего уравнения:

$$\Delta_{2n}(\lambda) = \det(M\lambda^2 + D\lambda + C) = 0. \qquad (6)$$

В данном случае имеет место алгебраическое уравнение порядка $2n$. На основе основной теоремы алгебры можно заключить, что оно будет иметь 2n корней (учитывая их кратность). Кроме того, в силу симметричности характеристической матрицы $A = M\lambda^2 + D\lambda + C$ и вещественности коэффициентов уравнения (6) можно заключить, что его корни будут попарно комплексно-сопряженными $\lambda_k = -\delta_k \pm i\omega_k \quad k = 1,2,...,n$ и могут именоваться собственными числами механической системы. В свою очередь, константы $\delta_k \ge 0$ называются коэффициентами затухания, ведь $\delta_k = 0$ при отсутствии диссипации $D = 0$ и $\delta_k > 0$ при наличии диссипации. Константы $\omega_k \ge 0$ именуются собственными частотами системы, которые пронумерованы по возрастанию: $0 \le \omega_1 \le \omega_2 \le \omega_3 \le .... \le \omega_n$, ω_1 - первая (низшая, основная) частота.

Каждая пара собственных чисел λ_k имеет соответствующее решение уравнения (5) $\bar{L}_k = (l_{kj})$, которое именуются собственными векторами системы. Так как решение уравнения (5) представлено в виде однопараметрического множества, одну из компонент вектора $\bar{L}_k = (l_{kj})$ можно задать произвольной константой, примером которой является константа $(l_{k1} = 1)$.

В случае если собственное число будет кратным, то можно говорить о наличии многопараметрического множества решений. Произвольными константами в данном случае можно задать количество компонент, которое равно кратности. После того, как были определены все собственные числа, а также векторы системы, появляется возможность найти систему линейно-независимых базисных решений однородного уравнения (1) и построить после того обще решение для всех собственных движений механической системы. Это будет иметь следующий вид:

$$\overline{X}_{собств}(t) = \sum_{k=1}^{m} \overline{L}_k \cdot (C_{2k-1} e^{-\delta_k + i\omega_k} + C_{2k} e^{-\delta_k - i\omega_k}) = \sum_{k=1}^{m} \overline{L}_k \cdot e^{-\delta_k} \cdot (C_{2k-1} Sin\omega_k t + C_{2k} Cos\omega_k t) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \overline{L}_k \cdot A_k e^{-\delta_k t} \cdot Sin(\omega_k t + a_k), \qquad (7)$$

Где C_{2k-1}, C_{2k} или A_k, a_k являются парами произвольных констант, которые тесно связаны известными соотношениями, общепринятыми для гармонических функций:

$$C_{2k-1}^2 + C_{2k}^2 = A_k^2, \qquad \frac{C_{2k}}{C_{2k-1}} = tg(a_k).$$

Стоит отметить, что базисные функции, которые имеют вид: $\overline{X}_{\kappa}^{б}(t) = \overline{L}_k \cdot A_k e^{-\delta t} Sin(\omega_k t + a_k)$ именуются в качестве собственных форм колебаний механической системы. Из приведенного выше решения явно следует, что собственные движения механической системы будут носить колебательный характер и будут представлены по каждой координате в качестве суммы собственных форм колебаний, имеющих амплитуду A_k на собственных частотах ω_k, с начальными фазами a_k.

Также в данном аспекте важно акцентировать внимание на том, что суммарное собственное движение должно быть представлено в прямой зависимости от того, каково соотношение частот, амплитуд и фаз собственных форм колебаний, причем хаотическим («случайным») движением. Одновременно с этим, если мы подберем соответствующие начальные условий, то мы сможем возбудить лишь одну из собственных форм, однако появится возможность наглядно ее увидеть. В то же время, линейным преобразованием с матрицей перехода $L = (\overline{L}_k) = (l_{kj})$ можно подобрать совершенно новые координаты, которые относятся к системе $\overline{Z}(t) = L \cdot \overline{X}(t)$ Стоит отметить, что матрицы жесткости, инерции и диссипации в этом случае будут иметь диагональный вид, а уравнения (1) будут расщепляться и не будут зависеть по каждой из новых координат:

$$m_k\ddot{z}_k + d_k\dot{z}_k + c_k z_k = F_k^*(t),$$

Координаты такого вида будут именоваться главными координатами, а их изменение будет происходить согласно законам движения линейного гармонического осциллятора.

Вынужденные движения $\overline{X}_{вынужд}(t)$ всегда совершаются в том случае, если имеют место внешние силы, которые прикладываются к системе и находятся с использованием различных математических методов, к числу которых вполне можно отнести операционный метод, метод вариации произвольных постоянных и методы Грина и Дюамеля [3]. Однако нами предлагается наиболее простое решение, в частности, стоит задать гармонический вид переменных внешних сил:

$$\overline{F}(t) = \bar{f} \cdot Sin(\Omega t + \varphi) = \mathrm{Im}[\bar{f} \cdot e^{i(\Omega t+\varphi)}],$$

где $\bar{f} = (f_k)$ вектор амплитуд внешних сил, которые изменяются одной частотой Ω и с одной начальной фазой φ. Как следствие, необходимо искать вынужденное движение, но обязательно в гармоническом виде:

$$\overline{X}_{вынужд}(t) = \overline{B} \cdot Sin(\Omega t + b) = \mathrm{Im}[\overline{B} \cdot e^{i(\Omega t+b)}], \qquad (8)$$

где $B = (B_k)$ является неизвестным вектором амплитуд у вынужденных колебаний, которые возбуждаются на частоте внешней силы и имеют неизвестную начальную фазу b. В данном случае выражения в квадратных скобках будут представлять собой комплексную внешнюю силу и будут иметь комплексное решение соответственно [1]:

$$\tilde{\overline{F}}(t) = \bar{f} \cdot e^{i(\Omega t+\varphi)} \qquad \tilde{\overline{X}}_{вынужд}(t) = \overline{B} \cdot e^{i(\Omega t+b)}.$$

Подставив в (1) мнимую часть комплексного решения сможем увидеть, что фаза и амплитуд вынужденных колебаний в полной мере удовлетворяет уравнению $(M(i\Omega)^2 + D(i\Omega) + C)\overline{B} = \bar{f}e^{i(\varphi-b)}$. Разделив действительную и мнимые части можно получить два уравнения, которые имеют вид:

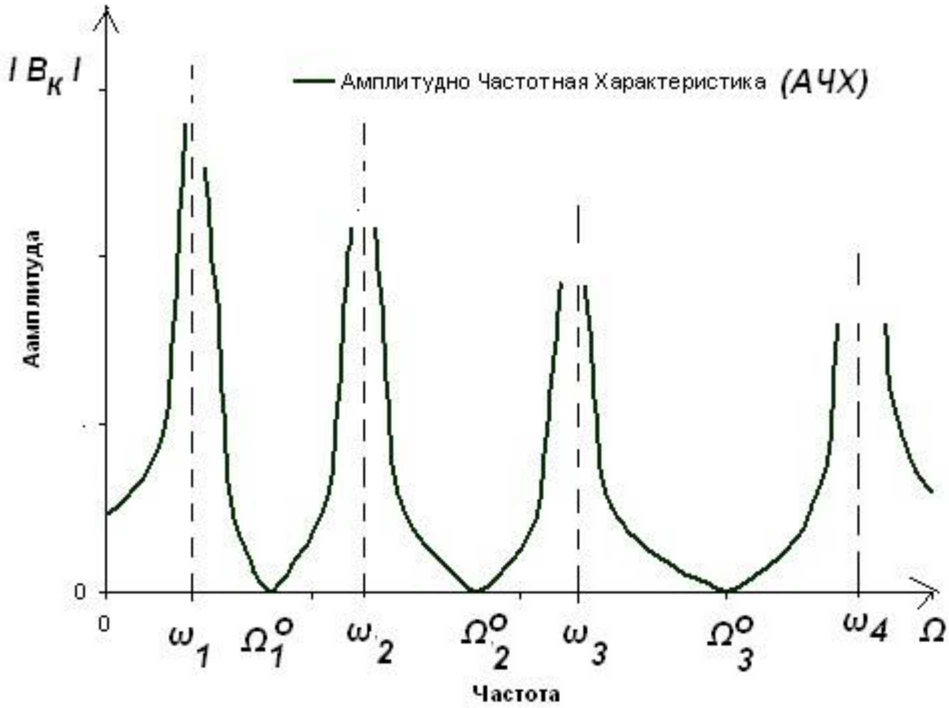
$$(-M\Omega^2 + C)\bar{B} = \bar{f} \cdot Cos(\varphi - b), \quad D\Omega\bar{B} = \bar{f} \cdot Sin(\varphi - b) \qquad (9)$$

Из них вполне могут быть найдены амплитуды $B_k = B_k(\Omega)$ и фаза $b = b(\Omega)$ вынужденных колебаний, выступающих в качестве функции частоты внешней гармонической силы. Стоит отметить, что данные функции будут именоваться как амплитудно-частотные (АЧХ) и фазо-частотные (ФЧХ) функции и могут выступать в качестве характеристик динамического поведения механической системы. Важно понимать, что физический смысл показателей АЧХ и ФЧХ заключается в том, что они отражают то, каким образом система реагирует на переменное внешнее воздействие в форме вынужденных колебаний. Более того, АЧХ одновременно является и коэффициентом динамичности механической системы.

Так, в отсутствие диссипации $D = 0$ смещение фаз вынужденных колебаний и вынуждающей силы будет отсутствовать $\varphi = b$, тогда из (9) по правилу Крамера находим АЧХ

$$B_k(\Omega) = (-M\Omega^2 + C)^{-1} \cdot \bar{f} = \frac{\Delta_{2n-2}^k(\Omega)}{\Delta_{2n}(\Omega)}$$

В рамках близости частоты внешней силы к одной из собственных частот, главный определитель $\Delta_{2n}(\Omega \approx \omega_k) \approx 0$ близок нулю, а в системе можно будет наблюдать резонансное усиление колебаний. Стоит отметить, что частоты внешней силы будут называться резонансными частотами $\Omega_r^* \approx \omega_k$. На рисунке представлен типичный вид АЧХ:



Отсюда явно следует, что сегодня существуют частоты внешней силы (Ω_k^0), которые именуются в качестве антирезонансных частот. При них вынужденные колебания возбуждаться не будут, так как система попросту не будет реагировать на переменное внешнее воздействие. Приходим к выводу, что если такие частоты существуют, то они близки к нулю по вспомогательным определителям Крамера:

$$\Delta_{2m-2}^{k}(\Omega_k^0) = 0.$$

Если в системе решения уравнений (9) нет диссипации, то неограниченных амплитуд в данной системе уже не будет, а частоты внешний сил будут находиться в линейке собственных частот системы. На этом фоне они будут называться квазирезонансными и квазиантирезонасными частотами.

В завершении стоит отметить, что если мы знаем амплитудно-частотную характеристику механической системы, то при проектировании той или иной конструкции мы сможем размещать ее собственные частоты, причем вдали от частот внешних воздействий. В свою очередь, антирезонансные частоты надо будет размещать наоборот ближе к ним. Также в завершении стоит указать общее решение уравнений (1), которые имеют следующий вид согласно (4):

$$\overline{X}(t) = \sum_{k=1}^{m} \overline{L}_k \cdot A_k e^{-\delta_k t} \cdot Sin(\omega_k t + a_k) + \overline{B} \cdot Sin(\Omega t + b)$$

Константы A_k, a_k определяются в нем исходя из начальных условий (2).

Библиографический список:

1. Луценко Е.В., Печурина Е.К., Сергеев А.Э. Развитый алгоритм принятия решений в интеллектуальных системах управления на основе АСК-анализа и системы «ЭЙДОС» // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского университета. 2020. № 160. С. 95-114.
2. Патов А.М., Сергеев А.Э. Экономико-математические модели и методы в землеустройстве. В сборнике: Студенческие научные работы инженерно-землеустроительного факультета. Сборник статей по материалам студенческой научно-практической конференции. 2017. С. 95-100.
3. Лаптев В.Н., Сергеев А.Э., Сергеев Э.А. Основная теорема арифметики и некоторые ее приложения. В сборнике: Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского университета. 2015. №113. С. 127-132.