

Мишин Павел Александрович, студент

ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский

Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва»,

Россия, г. Саранск

Немчинова Полина Андреевна, студент

ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский

Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва»,

Россия, г. Саранск

АНАЛИТИЧЕСКИЙ КОНТРОЛЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ СТАЦИОНАРНОГО ОБЪЕКТА С ВЕКТОРНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

Аннотация: Данная статья посвящена анализу задачи оптимальной стабилизации стационарного объекта с векторным управлением. Показано преимущество использования псевдообратной матрицы в соотношении оптимальности, связывающее характеристики объекта и регулятора.

Ключевые слова: оптимальная стабилизация, векторное управление, соотношение оптимальности, квадратичный функционал, оптимальный регулятор.

Annotation: This article is devoted to the analysis of the problem of optimal stabilization of a stationary object with vector control. The advantage of using a pseudoinverse matrix in the optimality ratio, linking the characteristics of the object and the controller, is shown.

Key words: optimal stabilization, vector control, optimality ratio, quadratic functional, optimal regulator.

Введение

Задачи оптимальной стабилизации возникают в различных технических системах. Зачастую их бывает необходимо решить на основе векторного управления, хотя со скалярным управлением такие задачи тоже распространены [1; 2]. Всегда заслуживают внимания аналитические способы и приемы анализа поставленных задач и их решения с векторным управлением.

Материалы и методы

Рассмотрим математическую модель объекта управления в следующем виде:

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t) + BU(t), \quad (1)$$

где $X(t)$ – n -мерный вектор состояния, $U(t)$ – r -мерный ($r > 1$) вектор управления, A – постоянная матрица действительных чисел размера $n \times n$, B – постоянная матрица действительных чисел размера $n \times r$. Как видно, управление является векторным.

При решении задачи о стабилизации требуется не только обеспечить асимптотическую устойчивость заданного движения $X(t)$ – решение уравнения (1), но и обеспечить минимизацию следующего квадратичного функционала

$$J = \int_0^{\infty} (X^T(t)QX(t) + R^T U(t)R) dt \rightarrow \min, \quad (2)$$

где Q – диагональная положительно-определенная матрица размера $n \times n$, R – диагональная положительно-определенная матрица размера $r \times r$, T – символ транспонирования. Функционал (2) обычно содержит пожелания о наилучшем качестве переходного процесса, о наименьшей возможной затрате ресурсов. Его выбор в конкретной прикладной задаче осуществляется с учетом особенностей ее постановки.

Решение задачи (1), (2) представляется в виде [3, 4]

$$U(t) = -K_p X(t), \quad (3)$$

где $K_p = R^{-1}B^T P$ – матрица коэффициентов оптимального регулятора размера

$r \times n$, а матрица P размера $n \times n$ является решением матричного нелинейного алгебраического уравнения Риккати [9]

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0. \quad (4)$$

Таким образом, расчет задачи оптимальной стабилизации базируется на решении уравнения (4) и вычислении управления по формуле (3). Выражение (3) на основе решения уравнения (4) обеспечивает минимизацию квадратичного функционала (2) [5, 6].

Аналитический контроль решения задач оптимальной стабилизации со скалярным управлением представлен в работе [1]. В данной работе рассматривается аналитический контроль с векторным управлением (3).

Общая формула, использующаяся как для скалярного, так и для векторного управления имеет вид [3]

$$R = B^T S^T Q S B + (E + B^T S^T K_p^T) R (E + K_p S B), \quad (5)$$

где $S = (A - BK_p)^{-1}$, E – единичная матрица размера $r \times r$.

Левая часть формулы (5) будет равна правой с заданной точностью при условии, что коэффициенты оптимального регулятора рассчитаны верно.

Расчет обратной матрицы S целесообразно осуществлять с помощью псевдообратной матрицы Мура-Пенроуза [7]: $M^+ = (A - BK_p)^+$. Матрица M^+ называется псевдообратной для матрицы M , если она удовлетворяет следующим свойствам:

1. $MM^+M = M$;
2. $M^+MM^+ = M^+$;
3. $(MM^+)^* = MM^+$;
4. $(M^+M)^* = M^+M$.

Здесь $(MM^+)^*$ и $(M^+M)^*$ – эрмитово сопряженные матрицы, а матрицы MM^+ и M^+M являются эрмитовыми матрицами. Эрмитова матрица – квадратная матрица, элементы которой являются комплексными числами, и которая, будучи транспонирована, равна комплексно сопряженной: $A^T = \bar{A}$. То

есть, для любого столбца i и строки j справедливо равенство $a_{i,j} = \overline{a_{j,i}}$ (\bar{a} – комплексно сопряженное число к a). Матрица Мура-Пенроуза позволяет работать с плохо обусловленными матрицами, у которых детерминант близок к нулю.

Введение в расчеты матрицы Мура-Пенроуза позволяет повысить точность расчета в формуле (5).

Результаты эксперимента

Эксперименты проводились в системе MATLAB, в которой существует функция *care* для решения уравнения (4). Для вычисления K_p может быть использована функция *lqr* (*linear-quadratic regulator*), позволяющая найти оптимальный регулятор для систем как со скалярным управлением, так и с векторным. При прямом обращении матрицы используется функция *inv*, а для псевдообращения – *pinv*.

Исходные данные n и r имеют значения 3 и 2 соответственно. Для матриц S и M^+ в формуле (5) будем генерировать случайные матрицы действительных чисел A и B по равномерному закону распределения из интервала (0, 1) с помощью функции *rand*, предварительно задав ядро для генератора случайных чисел функцией *rng*.

```
A = rand(n);
```

```
B = rand(n,r);
```

Листинг 1. Генерация матриц A и B

Например, *rng* (1) инициализирует генератор Mersenne Twister [8]. В данном эксперименте установим *rng* (1615). На каждой итерации увеличиваем размерность вектора состояния $X(t)$ на единицу. Диагональные положительно-определенные матрицы Q и R определим как постоянные. В первом случае Q и R зададим через функцию *diag*, которая формирует диагонально положительно-определенную матрицу, с элементами от 1 до n и от 1 до r соответственно. Дополнительно умножим Q на какое-нибудь действительное число, например, на 4.5.

```
Q = 4.5*diag(1:n);
```

```
R = diag(1:r);
```

Листинг 2. Генерация матриц Q и R в первом случае

Во втором случае – через функцию *gallery* (генерирует семейство тестовых матриц). Для Q установим параметры *moler* (формирует симметричную положительно определенную матрицу Молера) и n , а для R – *minij* (формирует симметричную положительно определенную матрицу) и r .

```
Q = gallery('moler',n);
```

```
R = gallery('minij',r);
```

Листинг 3. Генерация матриц Q и R во втором случае

В силу того, что A и B задаем случайно, на каждой итерации их формирования необходимо проверять критерий управляемости по Калману. Он заключается в том, что ранг матрицы управляемости $BABA^2B \dots A^{n-1}B$ должен быть равен размерности вектора состояний n . В системе MATLAB для этих целей используются функции *rank* (ранг матрицы) и *ctrb* (формирует матрицу управляемости).

Построим графики (рис. 1) и (рис. 2), по оси абсцисс будем откладывать размерность вектора состояний $X(t)$, а по оси ординат для матриц S и M^+ – рассчитывать относительную погрешность по евклидовой норме.

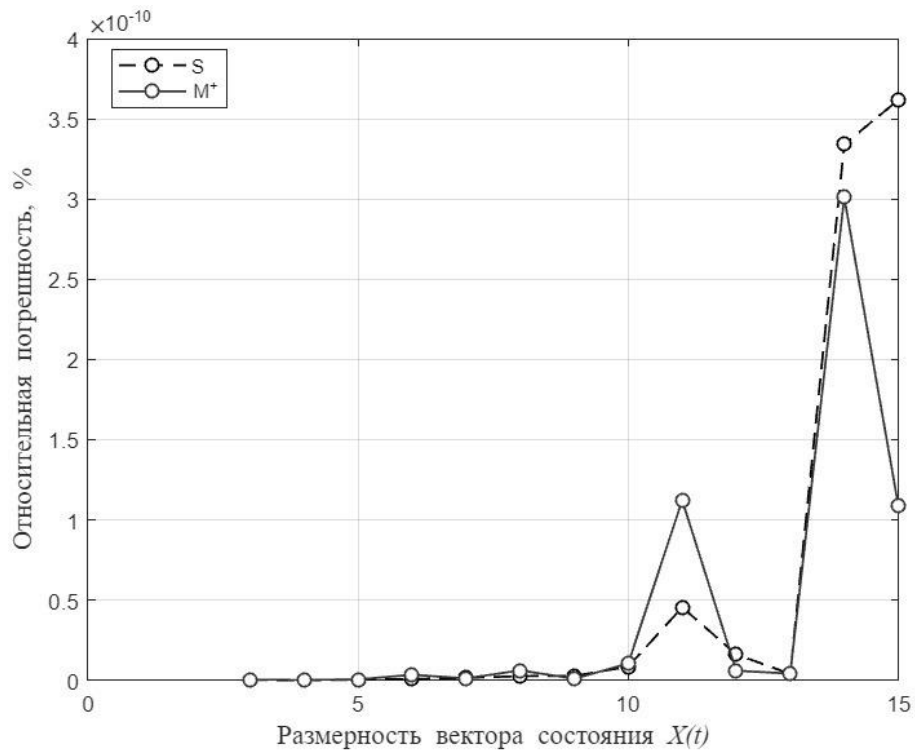


Рис. 1. Зависимость относительной погрешности от размерности задачи оптимальной стабилизации при определении матриц Q и R через функцию *diag*

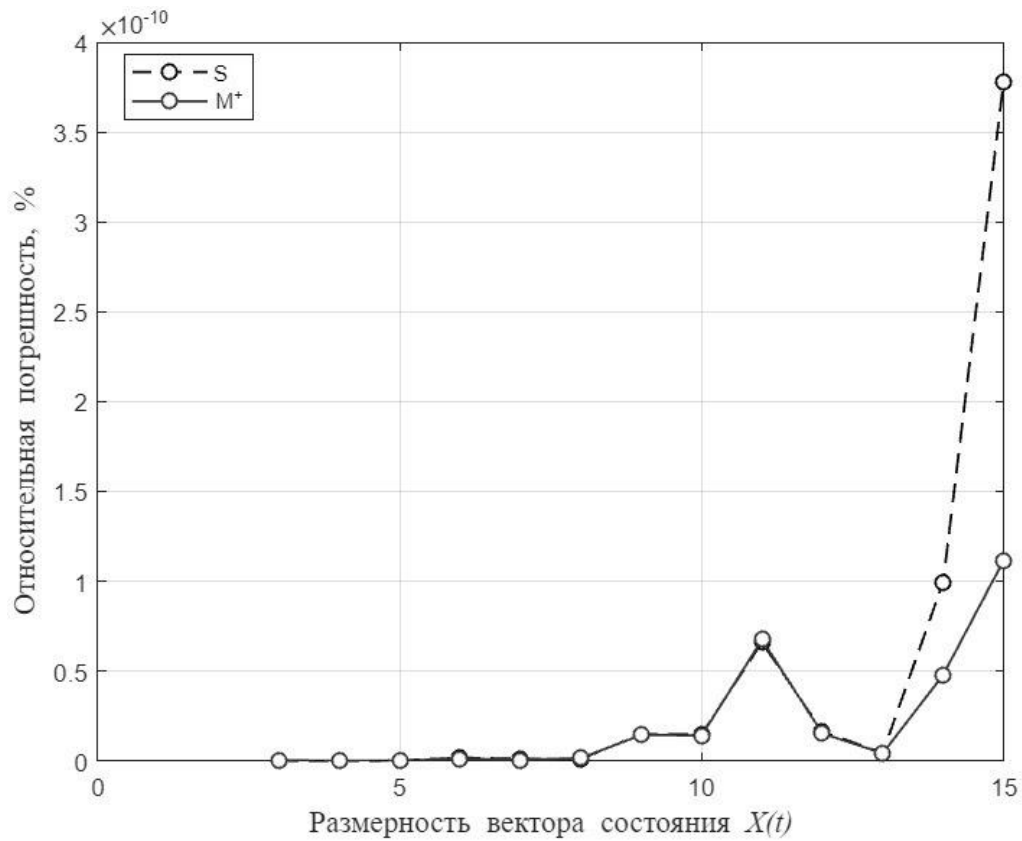


Рис. 2. Зависимость относительной погрешности от размерности задачи оптимальной стабилизации при определении матриц Q и R через функцию *gallery*

Выводы

В результате анализа аналитического контроля решения задачи оптимальной стабилизации с векторным управлением и проведенных экспериментов можно сделать вывод о том, что использование матрицы Мура-Пенроуза дает меньшую погрешность при сильном увеличении размерности вектора состояний. Следует также учитывать тот факт, что матрица Мура-Пенроуза предоставляет возможность работать с вырожденными матрицами.

Библиографический список:

1. Афонин В. В. Аналитический контроль решения задачи оптимальной стабилизации стационарного объекта со скалярным управлением // Вестник Мордовского университета. – 1998. – №3-4. – С. 122-123.
2. Афонин В. В., Мурюмин С. М. Обратные задачи оптимальной стабилизации со скалярным управлением // Инженерные технологии и системы. – 2017. – Т. 27, №. 4. – С. 504-517.
3. Афонин В. В., Мурюмин С. М. Соотношения оптимальности в линейно-квадратичной задаче управления // Журнал Средневолжского математического общества. – 2014. – Т. 16, № 2. – С. 118-120.
4. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. – М.: Наука, 1966. – 532 с.
5. Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического регулирования. – Спб.: Профессия, 2003. – 752 с.
6. Попов А.К. Элементы теории автоматического управления. В 2 ч. / А.К. Попов. – М: МИРЭА, 2010. Ч. 1. – 208 с.; Ч. 2. – 184 с.
7. Цеханов О. Б. Матричный анализ. – Гродно: ГрГУ им. Янки Купалы, 2010. – 373 с.
8. Matsumoto M., Kurita Y. Twisted GFSR generators II // ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation (TOMACS). – 1994. – Т. 4, №. 3. – С. 254-266.
9. Petersen I. R., Hollot C. V. A Riccati equation approach to the

stabilization of uncertain linear systems // Automatica. – 1986. – T. 22, №. 4. – С. 397-411.