УДК 519.612 **Физико-математические науки**

Кишкин Сергей Александрович, *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры практической и прикладной информатики института информационных технологий*

МИРЭА-Российский технологический университет, Россия, г. Москва

СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОГО КОМПЛЕКСА ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ОСНОВЫ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ»

Аннотация: На примере дисциплины «Основы численных методов», преподаваемой автором на кафедре практической и прикладной информатики ИИТ РТУ-МИРЭА, в статье ставится и успешно решается задача создания индивидуальных заданий для студентов посредством создания обобщенных аналитических моделей решаемых учебных задач. Значение для учебного процесса состоит в исключении возможности некорректных заимствований студентами различных групп одного потока. В работе рассматривается процесс решения нелинейных алгебраических уравнений третьей степени в общем виде с последующим анализом смещения корней на вещественной оси. Проводится анализ полученных результатов с точки зрения уникальности формируемого задания.

Ключевые слова: математическое моделирование, процесс обучения, подготовка специалистов, борьба с заимствованиями, генерация уникальных заданий, численные методы, нелинейные уравнения.

Annotation: On the example of the discipline "Numerical Methods", taught by the author at the Department of Practical and Applied Informatics of IIT RTU-MIREA, the article poses and successfully solves the problem of creating individual tasks for students by creating generalized analytical models of the educational problems. The value for the educational process is to exclude the possibility of incorrect borrowing by students of different groups of the same speciality. The paper considers the process of solving nonlinear algebraic equations of the third degree in a general form, followed by an analysis of the displacement of the roots on the real axis. The analysis of the obtained results is carried out from the point of view of the uniqueness of the generated task

Keywords: mathematical modeling, learning process, training of specialists, fight against borrowing, generation of unique tasks, numerical methods, nonlinear equations.

Введение. Современный мир все в большей степени пронизывают информационные технологии: это приводит к необходимости подготовки специалистов совершенно различных направлений, что успешно решается в стенах Института информационных технологий РТУ-МИРЭА. Любой коллектив обучающихся многогранен – в нем можно найти как прилежных учеников, так лиц, стремящихся обойти установленные дисциплиной рамки, например, путем списывания готовой работы. В рамках учебной группы такой процесс пресекается просто: путем подготовки заданий для каждого студента в отдельности. Однако на одном потоке может находиться десять и более групп, откуда очевидным образом следует утверждение, что подготовленный набор заданий уже не является уникальным, поскольку многократно дублируется по количеству учебных групп. В этом случае, альтернативно честные студенты могут найти среди других групп свой вариант и успешно его переписать. В настоящей работе автор предпринимает попытку описать подход к созданию заданий в количествах порядка нескольких тысяч.

Формализованная постановка задачи. В рамках дисциплины «Основы численных методов» рассматривается классическая проблема поиска корней нелинейных уравнений. Еще со времен Э. Галуа, известно, что для полиномов пятой степени и выше не существует аналитических формул для получения корней [1; 2]. Что уж там говорить об областях науки и техники, в которых искомые зависимости могут и вовсе не выражаться через алгебраические функции: быть трансцендентными. Понятно, что знакомство студентов производится с самыми простыми методами численного нахождения корней (половинного деления, хорд, касательных) применимо к одним самым простых функций: полиномам третьей степени вида:

$$f(x) = x^3 + px + q, \tag{1}$$

где $p,q \in \mathbb{R}$ - некоторые вещественные числа. Тогда для создания уникального задания для каждого студента необходимо научиться генерировать пары чисел (p,q), отвечающих некоторым качественным условиям.

Анализ нахождения корней полиномов третьей степени. Заметим, что заданная уравнением (1) нелинейная функция на самом деле является функцией трех переменных:

$$f(x,p,q) = x^3 + px + q. \tag{2}$$

Изучением таких функций занимался Д. Кардано, который еще в XVI веке доказал, что произвольный полином третьей степени может быть сведен при помощи специальных подстановок к виду (2). Формулы, дающие точные решения кубического уравнения с тех пор известны нам как формулы Кардано. Автор не претендуют на подобное место в истории, поэтому в рамках настоящей работы ограничивается уравнением вида:

$$f(x,p,q) = x^3 + px + 2. \tag{3}$$

которое позволяет получить более простые аналитические выкладки и решить поставленную задачу. В этом случае, согласно Кардано, определим величину:

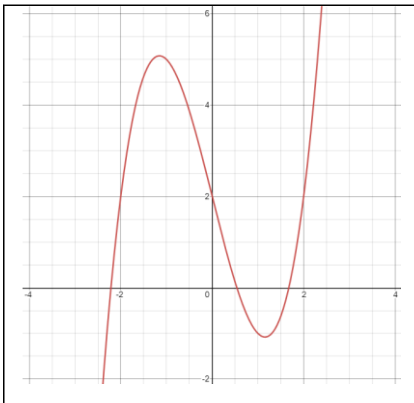
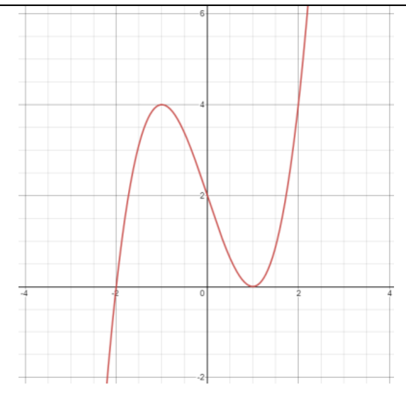
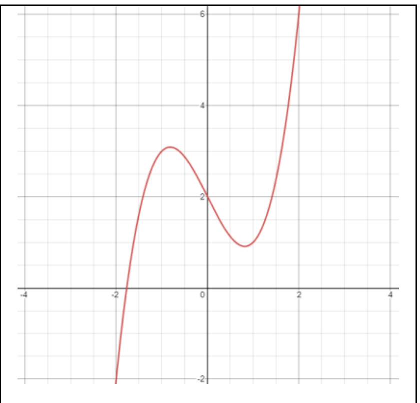
$$Q = \frac{p^3}{27} + 1, \tag{4}$$

связанную, вообще говоря, с дискриминантом полинома произвольной степени. Известно, что при $Q > 0$ уравнение имеет одно вещественное и два комплексно-сопряженных решения, при $Q = 0$ – одно вещественное решение кратности один и одно вещественное решение кратности два, а при $Q < 0$ - три вещественных решения, каждое из которых, тем не менее, выражается в комплексной арифметике. Для разминки узнаем, при каких значениях параметра p будет реализован тот или иной случай, приравняем Q к нулю:

$$\begin{gathered} Q = \frac{p^3}{27} + 1 = 0, \\ \frac{p^3}{27} = -1, \\ p^3 = -27, \\ p = -3. \end{gathered} \tag{5}$$

В таблице 1 приведена графическая иллюстрация всех трех случаев.

Таблица 1. Пример зависимости существования различного количества корней уравнения (3)

		
$p = -4, Q < 0;$ $f(x) = x^3 - 4x + 2$	$p = -3, Q = 0;$ $f(x) = x^3 - 3x + 2$	$p = -2, Q > 0;$ $f(x) = x^3 - 2x + 2$

Величина Q интересна тем что через нее выражаются элементы a и b:

$$\begin{gathered} a = \sqrt[3]{-1 + \sqrt{Q}}, \\ b = \sqrt[3]{-1 - \sqrt{Q}}. \end{gathered} \tag{6}$$

которые дают искомый корень полинома третьей степени. В случае $Q > 0$, все выражение является вещественным и нетрудно получить $a + b$ искомый вещественный корень уравнения (3).

Однако следует помнить о том, что корень n-й степени из числа это, вообще говоря, многозначная функция. Таким образом, при $Q < 0$, выражение

(6) задает не одну пару, а целых три пары комплексно-сопряженных чисел, которые дают три различных вещественных корня. Продемонстрируем это на конкретном примере: пусть $Q = -1$ Ы $p = -3\sqrt[3]{2}$. Тогда:

$$\begin{gathered}\alpha = \sqrt[3]{-1+i} = \left\{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}}, \sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{12}}\right\}, \\ \beta = \sqrt[3]{-1-i} = \left\{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}, \sqrt{2}e^{-i\frac{11\pi}{12}}\right\}.\end{gathered} \tag{7}$$

где $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица, под кубическим корнем приведено комплексное число в арифметической форме, а в фигурных скобках, все значения всех трех ветвей кубического корня в полярной форме. Путем группировки комплексно-сопряженных чисел получим три вещественных корня уравнения $x^3 - 3\sqrt[3]{2}x + 2 = 0$:

$$\begin{gathered}x_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}} + \sqrt{2}e^{-i\frac{11\pi}{12}} \approx -2.1684, \\ x_1 = \sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{12}} + \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}} \approx 0.581, \\ x_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} + \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \approx 1.5874.\end{gathered} \tag{8}$$

Напомним, что для нахождения корней полинома третьей степени обучающиеся пользуются методами половинного деления, хорд и касательных [3, 4], а все расчеты ведут на непрограммируемом калькуляторе. Поэтому построенная в работе математическая модель процесса поиска корня должна еще и давать взаимосвязь между варьируемым параметром p уравнения (3) и областью размещения искомых корней уравнения: она не должна быть слишком велика, чтобы приближения корней итеративных методов было удобно вручную подставлять в функцию $f(x)$ на калькуляторе.

Заметим, что $f(x, p, q) = x^3 + px + 2$ является линейной по параметру p, тогда его непрерывные изменения приведут к непрерывному смещению x_0 – единственного вещественного корня заданной функции. Только когда параметр

Q обратиться в ноль, появится еще один вещественный корень кратности два, который далее при отрицательных значениях Q разделится на два разных корня. Геометрически этот процесс в сокращенном виде можно наблюдать в таблице 1 (см. справа-налево), а в расширенном – онлайн в графическом калькуляторе Desmos по авторской ссылке (*https://www.desmos.com/calculator/h3kosrfa6l?lang=ru*). Для рассмотренного в работе примера при $p \in [-5, 5]$ получается область размещения вещественных корней: отрезок $[-3, 2]$ – вполне пригодный для вычислений с использованием калькулятора, поскольку приближения истинного корня по модулю не превышают трех. Таким образом мы можем гарантировать, что для любого p в указанном диапазоне можно ставить задачу [5; 6] студенту на отыскание корня уравнения и она будет корректна.

Выводы. В работе был рассмотрен подход к генерации уникальных заданий для студентов с целью исключения некорректных заимствований (списываний) в пределах одного потока. Показаны основные этапы решения исследовательской задачи: формализованная постановка, анализ предметной области, получение аналитического решения поставленной задачи.

Библиографический список:

1. Б.Л. Ван-дер-Варден Алгебра – М.: Мир, 1976. – 648 с.
2. Ильин В. А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра: Учеб.: Для вузов. — 6-е изд., стер. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 280 с. — (Курс высшей математики и математической физики). — ISBN 5-9221-0481-0.
3. Киреев В.И., Пантелеев А.В. Численные методы в примерах и задачах: Учебное пособие. — 4-е изд., испр. — СПб.: Издательство «Лань», 2015. — 448 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).
4. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения: Учебное пособие. 5-е изд., стер./ Под ред. Б.П. Демидовича. ¬ СПб.:

Издательство «Лань», 2010. – 400 с.

5. Зуев А.С. Проектирование и реализация вычислительных алгоритмов [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие — М., Московский технологический университет (МИРЭА), 2016 — 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).

6. Зуев А.С. Проектирование и реализация вычислительных алгоритмов [Электронный ресурс]: практикум — М., Московский технологический университет (МИРЭА), 2016 — 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).