УДК 532.5 **Технические науки**

Разувай Татьяна Александровна, *студент 4 курс, физический факультет*
Филиал МГУ в г. Севастополе, Россия, г. Севастополь

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ В КАНАЛАХ РАЗЛИЧНОЙ ФОРМЫ

Аннотация: В статье на примере двух плоских каналов рассматривается течение идеальной несжимаемой жидкости. В гидродинамике широко используются математические методы, что придает ее результатам строгость. Однако сложность и разнообразие геометрических форм реальных каналов, применяемых в системах водоснабжения и вентиляции, не позволяет получать результаты в аналитическом виде. Поэтому приходится использовать приближенные уравнения и приближенные методы их решений. Современные возможности математического моделирования и наличие разнообразных математических пакетов позволяет реализовывать для этой цели различные численные методы. Статья посвящена численному решению уравнения Лапласа методом конечных элементов в пакете Wolfram Mathematica.

Ключевые слова: уравнение Лапласа, идеальная жидкость, функция тока, линии тока, метод конечных элементов, коэффициент давления, граничные условия.

Annotation: In the article, the flow of an ideal incompressible fluid is considered using the example of two flat channels. Mathematical methods are widely used in hydrodynamics, which gives its results rigor. However, the complexity and variety of geometric shapes of real channels used in water supply and ventilation systems does not allow obtaining results in an analytical form. Therefore, it is necessary to use approximate equations and approximate methods of their solutions. Modern possibilities of mathematical modeling and the availability of various

mathematical packages allow us to implement various numerical methods for this purpose. The article is devoted to the numerical solution of the Laplace equation by the finite element method in the Wolfram Mathematica package.

Keywords: Laplace equation, ideal fluid, current function, current lines, finite element method, pressure coefficient, boundary conditions.

В данной статье рассматривается плоское установившееся течение идеальной несжимаемой жидкости в каналах двух типов (Рис.1 и Рис.2). Потенциальность течения означает, что оно обладает потенциалом скоростей φ, таким что $\vec{v} = grad\,\varphi$, где $\vec{v}$ – вектор скорости [1; 2; 5]. Подействуем оператором ротор на обе части последнего равенства, тогда уравнение неразрывности $rot\vec{v} = 0$ примет следующий вид: $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0$ (1).

Учитывая, что потенциал скоростей φ и функция тока ψ являются комплексно сопряженными функциями [1,5], а также то, что эти функции удовлетворяют условиям Коши-Римана [1,3,4] $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$, уравнение (1) можно переписать в виде $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0$ (2). Уравнение (2) называется уравнением Лапласа для функции тока. Тогда проекции вектора скорости на оси координат будут равны: $v_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}$ и $v_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$ (3).

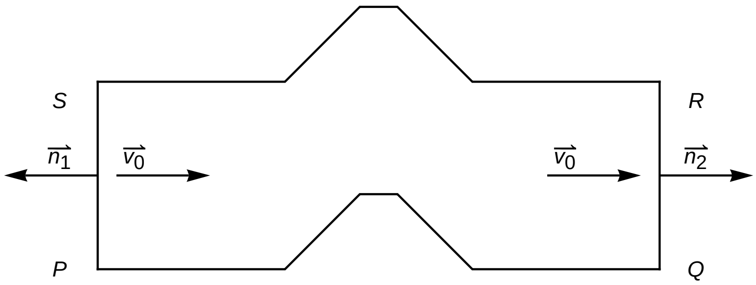

Рис1 Канал первого типа

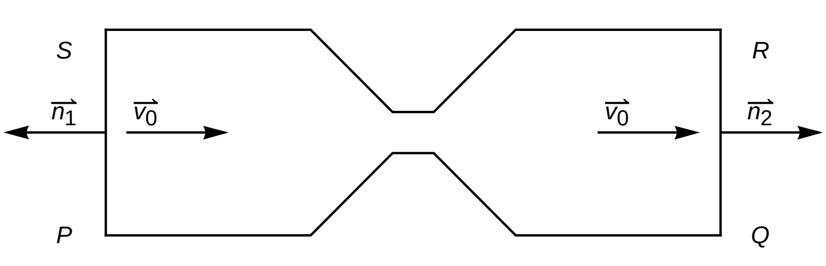

Рис.2 Канал второго типа

Для решения уравнения (2) необходимо задать граничные условия на стенке, а также на входе в канал и на выходе из него. На стенке PQ поставим условие Дирихле $\psi = \psi_1 = 0$, на стенке SR также поставим условие Дирихле $\psi = \psi_2 = 1$. Физический смысл имеют не сами функции тока, а разность их значений, которая определяет расход жидкости [1]. Так как ширина канала на выходе и на входе выбрана единичной, то разность значений функций тока определяет величину скорости на входе в канал и на выходе из него. При данном выборе условий Дирихле эта скорость $v_0 = 1$ (Рис1, Рис2).

На торцах PS и QR удобнее задавать не значение функции тока, а ее нормальную производную. Это приводит к так называемой второй краевой задаче или условиям Неймана. На торце PS выполняются следующие условия $v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y} = 1$ и $v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0$, Учитывая направление вектора нормали $\overrightarrow{n_1} = \{-1;\ 0\}$, приходим к следующему условию Неймана $\frac{\partial\psi}{\partial n_1} = \frac{\partial\psi}{\partial x} * (-1) + \frac{\partial\psi}{\partial y} * 0 = 0$. Аналогично на торце PS выполняются следующие условия $v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y} = 1$ и $v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0$, Учитывая направление вектора нормали $\overrightarrow{n_2} = \{1;\ 0\}$, приходим к следующему условию Неймана $\frac{\partial\psi}{\partial n_1} = \frac{\partial\psi}{\partial x} * 1 + \frac{\partial\psi}{\partial y} * 0 = 0$. Данные краевые условия выполняются для каналов обоих типов. Поставленная смешанная краевая задача для уравнения Лапласа решалась в пакете Вольфрам Математика методом конечных элементов [6]. Разбиение области течения для каналов обоих типов показано на Рис.3 и Рис.4.

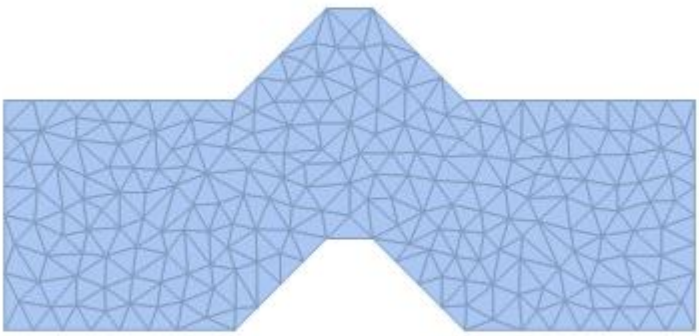

Рис.3 Разбиение канала первого типа на конечные элементы

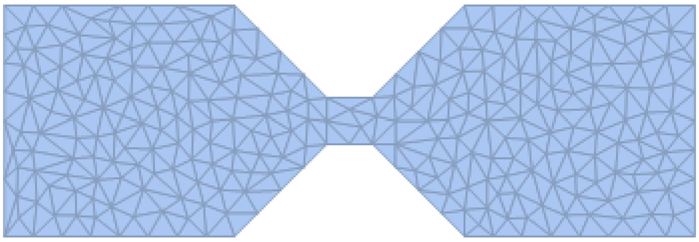

Рис.4 Разбиение канала второго типа на конечные элементы

Численное решение задачи позволяет построить линии тока, как линии равного уровня для функции $\psi(x, y)$. Линии тока приведены на Рис.5 и Рис.6.

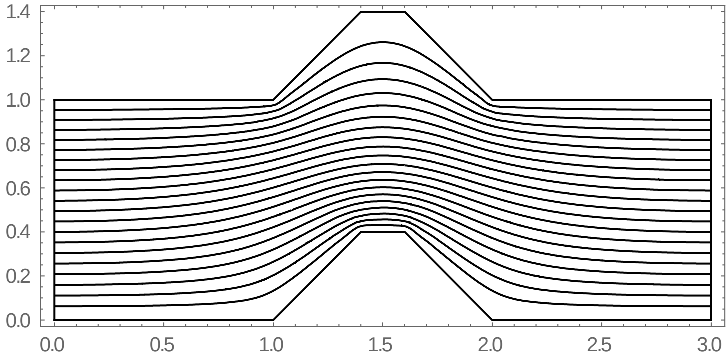

Рис.5 Линии тока в канале первого типа

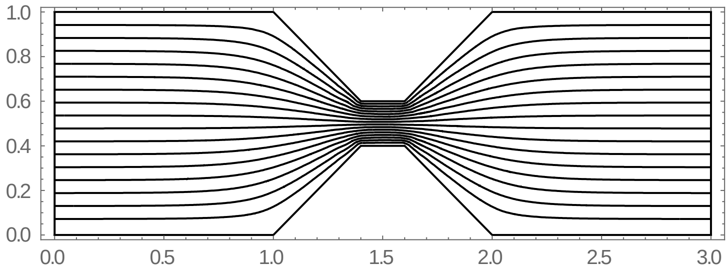

Рис.6 Линии тока в канале второго типа

Используя тоже решение и условия (3) возможно построить распределение модуля скорости в канале. В результате таких построений получены Рис.7 и Рис.8.

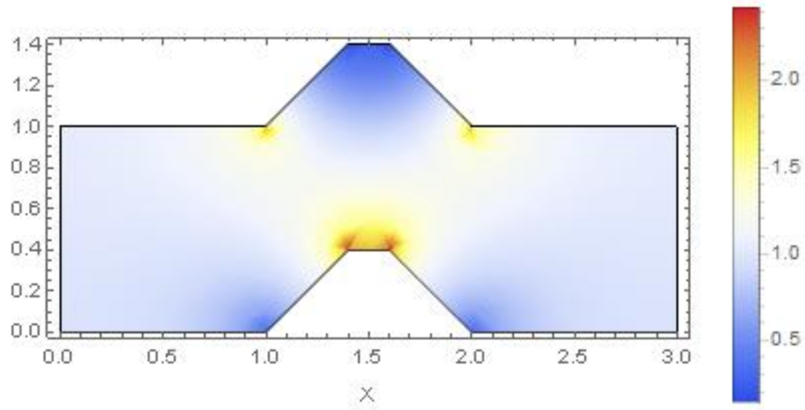

Рис.7 Распределение модуля скорости в канале первого типа

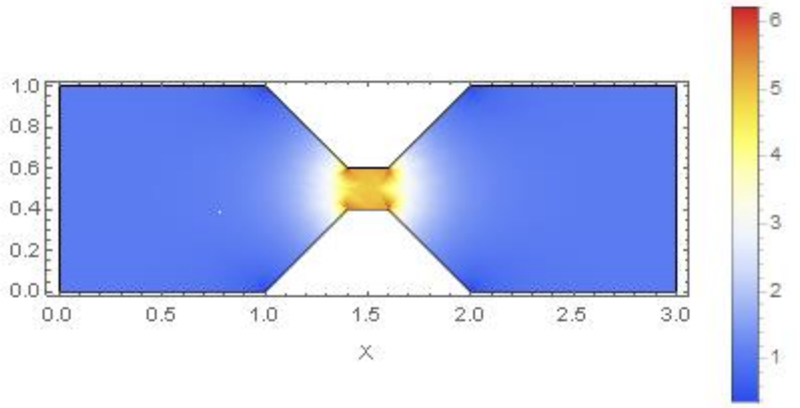

Рис.8 Распределение модуля скорости в канале второго типа

Представляет также определенный интерес построение распределения коэффициента давления, который дает представление о силовых воздействиях жидкости на стенки канала. Такое распределение представлено на Рис.9 и Рис.10.

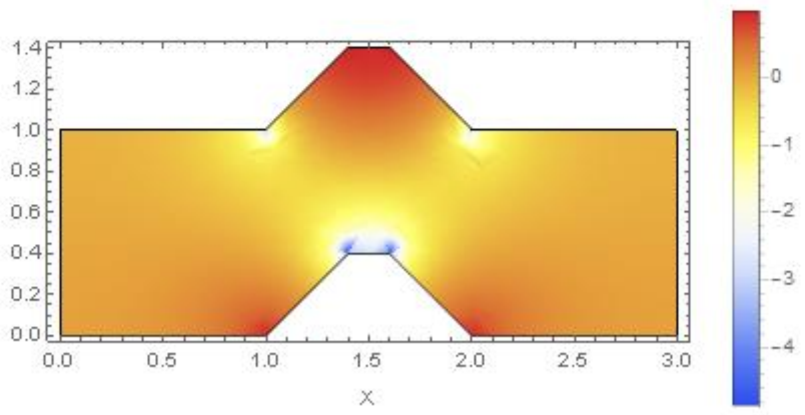

Рис.9. Распределение коэффициента давление в канале первого типа

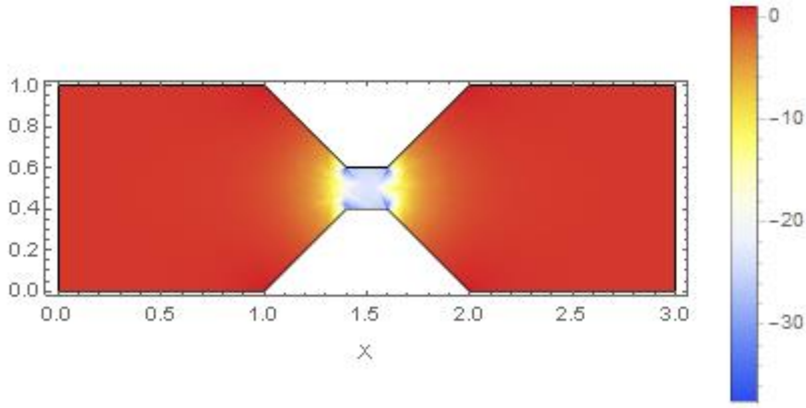

Рис.10. Распределение коэффициента давление в канале второго типа

Предложенная методика позволяет строить не только линии тока, но и распределение скоростей (Рис. 7 и Рис.8), а также распределение коэффициента давления (Рис.9 и Рис.10), что является ее существенным преимуществом по сравнению с остальными методиками. Во всех расчетах было принято значение $v_0 = 1$. Исходя из уравнения Бернулли, можем записать следующие соотношения: $p_0 + \frac{\rho v_0^2}{2} = p + \frac{\rho v^2}{2}$ или $p - p_0 = \frac{\rho}{2}(v_0^2 - v^2) = \frac{\rho v_0^2}{2}\left(1 - \left(\frac{v}{v_0}\right)^2\right)$.

Тогда коэффициент давления с учетом того, что $v_0 = 1$,выразится следующим простым образом: $C_p = \frac{p - p_0}{\rho v_0^2/2} = 1 - \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 = 1 - v^2$.

Библиографический список:

1. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика//ГИФМЛ. 1963. С. 129-134.

2. Емцев В.Т. Техническая гидромеханика//Машиностроение. 1987. С.212-215.

3. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного//Наука.1965. С.22-25.

4. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. Том 1//Наука. 1967. С.79-89.

5. Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости//Наука.1979. С.13-14.

6. Дьяконов В.П. Mathematica 5/6/7//ДМК.2010.