

Афонин Виктор Васильевич, кандидат технических наук, доцент кафедры автоматизированных систем обработки информации и управления, Институт электроники и светотехники, ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва», Россия, г. Саранск

Мишин Павел Александрович, студент, Институт электроники и светотехники, ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва», Россия, г. Саранск

Мишина Полина Андреевна, студент, Институт электроники и светотехники, ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва», Россия, г. Саранск

ВАРИАЦИОННЫЙ ПОДХОД К СИНТЕЗУ ОПТИМАЛЬНОГО РЕГУЛЯТОРА В ЗАДАЧЕ СТАБИЛИЗАЦИИ

Аннотация: Данная статья посвящена решению задачи оптимальной стабилизации линейной стационарной системы автоматического управления. Показаны этапы синтеза оптимального регулятора на основе решения вариационной задачи Лагранжа. Приведен пример расчета для электромеханического объекта управления. На основе соотношения оптимальности, связывающего характеристики объекта и регулятора, произведен аналитический контроль решения поставленной задачи и сделаны соответствующие выводы.

Ключевые слова: оптимальная стабилизация, соотношение оптимальности, оптимальный регулятор, задача Лагранжа, пространство состояний, линейная стационарная система управления.

Annotation: The article is devoted to solving the problem of optimal stabilization of a linear stationary automatic control system. The stages of synthesis of the optimal regulator based on the solution of the Lagrange variational problem are shown. An example of calculation for an electromechanical control object is given. On the basis of the optimality ratio linking the characteristics of the object and the regulator, analytical control of the solution of the task was carried out and appropriate conclusions were drawn.

Key words: optimal stabilization, optimality ratio, optimal regulator, Lagrange problem, state space, linear stationary control system.

Введение

Задача оптимальной стабилизации линейных систем управления (the problem of optimal stabilization of linear control systems) считается хорошо изученной, однако до сих пор возникают различные варианты постановки и подходы к решению данной проблемы. Широкое распространение получили задачи с векторным [1; 2], а также со скалярным управлением [3; 4].

Решение задачи оптимальной стабилизации связано с расчетом статических коэффициентов матрицы оптимального регулятора, на который замыкается объект управления. Авторы данной работы рассматривают и предлагают расчет (синтез) оптимального регулятора на основе решения вариационной задачи Лагранжа. В вычислительном плане предлагаемый подход в основном связан с матричными операциями численного анализа [5].

В качестве примера рассмотрен электромеханический объект (ЭМО) управления, представляющий собой тиристорный преобразователь-двигатель постоянного тока с независимыми возбуждениями (ТП-ДПТ с НВ). Поставлена и решена задача изменения динамики данного объекта на основе расчета коэффициентов обратной связи.

Опираясь на соотношение оптимальности [6], был подтвержден адекватный расчет и синтез оптимального регулятора.

Материалы и методы

Рассмотрим математическую модель линейного стационарного объекта в следующем виде:

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t) + BU(t), \quad (1)$$

где $X(t)$ – n -мерный вектор состояния, $U(t)$ – r -мерный ($1 \leq r \leq n$) вектор управления, A – не зависящая от времени матрица действительных чисел размера $n \times n$, B – не зависящая от времени матрица действительных чисел размера $n \times r$. Можно заметить, что управление является векторным.

Для системы (1) выбор начальных или граничных условий может быть любым, и свойства от этого изменяться не будут, поэтому определим граничные условия следующим образом:

$$X(0) \neq 0, X(\infty) = 0. \quad (2)$$

При синтезе управления дополнительно к задаче обеспечения асимптотической устойчивости тривиального решения системы (1), замкнутой управлением $U = KX(t)$, потребуем, чтобы управление также минимизировало некоторую величину, характеризующую качество переходных процессов, называемую далее квадратичным функционалом, который принимается в виде

$$J = \int_0^{\infty} (X^T Q X + U^T R U) dt, \quad (3)$$

где Q, R – симметричные неотрицательно-определенные матрицы размера $n \times n$, $r \times r$, соответственно, T – символ транспонирования. Решение задачи (1), (2), (3) обеспечивает асимптотическую устойчивость синтезированной системы [7,8]. Предполагается, что на входящие в функционал переменные ограничений не наложено. Поставленную задачу можно рассматривать как вариационную задачу на условный экстремум. Она также называется задачей оптимальной стабилизации или задачей о линейно-квадратичном регуляторе (linear-quadratic regulator).

Решим задачу (1), (2), (3) в общем (матричном) виде. Относительно задачи

(1) – (3) введем в рассмотрение вспомогательный функционал \overline{J} :

$$\overline{J} = \int_0^{\infty} [X^T \cdot Q \cdot X + U^T \cdot R \cdot U + \lambda^T (\dot{X} - A \cdot X - B \cdot U)] dt, \quad (4)$$

где λ – векторный множитель Лагранжа размера $n \times 1$. Интегрант функционала (4) является функцией Лагранжа.

Вспомогательный функционал (4) позволяет рассматривать вариационную задачу на безусловный экстремум [9; 10]. Обозначив интегрант в (4) через L составим уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial X} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}} \right) &= 0; \\ \frac{\partial L}{\partial U} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{U}} \right) &= 0; \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda^T} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}^T} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

С учетом правил векторного дифференцирования квадратичной формы [11], распишем составляющие каждого из векторных уравнений, входящих в (5):

$$\frac{\partial L}{\partial X} = 2X^T Q - \lambda^T A, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} = \lambda^T, \quad \rightarrow 2X^T Q - \lambda^T A - \frac{d\lambda^T}{dt} = 0; \quad (6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial U} = 2U^T R - \lambda^T B, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{U}} = 0, \quad \rightarrow 2U^T R - \lambda^T B = 0; \quad (7)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda^T} = \frac{dX(t)}{dt} - AX(t) - BU(t), \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}^T} = 0, \quad \rightarrow \frac{dX(t)}{dt} - AX(t) - BU(t) = 0. \quad (8)$$

Выразим управление U из уравнения (7):

$$\begin{aligned} 2U^T R - \lambda^T B &= 0; \\ U^T &= 0.5\lambda^T B R^{-1}; \\ U &= 0.5R^{-1} B^T \lambda. \end{aligned} \quad (9)$$

Транспонируем и записываем в нормальной форме уравнение (6):

$$\frac{d\lambda}{dt} = 2QX - A^T \lambda. \quad (10)$$

Подставляя (9) в (8) и записывая в (10), получим однородную систему

дифференциальных уравнений в следующем виде:

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= AX + 0.5BR^{-1}B^T\lambda, \\ \frac{d\lambda}{dt} &= 2QX - A^T\lambda.\end{aligned}\tag{11}$$

Введем новое обозначение – вектор Z :

$$Z = \begin{bmatrix} X \\ \lambda \end{bmatrix}, \frac{dZ}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dX}{dt} \\ \frac{d\lambda}{dt} \end{bmatrix}.\tag{12}$$

Согласно (12) систему (11) перепишем относительно введенного вектора Z :

$$\frac{dZ}{dt} = A_z Z,\tag{13}$$

где

$$A_z = \begin{bmatrix} A & 0.5BR^{-1}B^T \\ 2Q & -A^T \end{bmatrix}.\tag{14}$$

Заметим, что коагулированная матрица A_z в (14) имеет размерность $2n \times 2n$. Будем искать аналитическое решение однородного линейного уравнения (13) в следующем виде [12]:

$$Z(t) = Ve^{st},\tag{15}$$

где s – неизвестный параметр, V – неизвестный постоянный вектор вида

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_{2n} \end{bmatrix}.$$

Подставляя (15) в (13) получим

$$sVe^{st} = A_z Ve^{st}.\tag{16}$$

Вектор V должен быть решением алгебраической системы уравнений (16) (в матричной форме)

$$(sE_z - A_z)V = 0,\tag{17}$$

где E_z – единичная матрица размера $2n \times 2n$.

Однородное дифференциальное уравнение всегда имеет тривиальное

решение равно 0, а для того чтобы V было нетривиальным решением, необходимо потребовать, чтобы определитель, составленный из коэффициентов при V , был равен нулю, т. е.

$$|sE_z - A_z| = 0, \quad (18)$$

где $E_z = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix}$, E – единичная матрица размера $n \times n$, а нулевые элементы – это матричные нули той же размерности, т. е. $n \times n$.

Известно [7], если s_1 – корень уравнения (18), то и $(-s_1)$ – также является корнем этого уравнения. С учетом (14) подставим s_1 в уравнение (18):

$$\det \left[\begin{bmatrix} s_1 E & 0 \\ 0 & s_1 E \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A & 0.5BR^{-1}B^T \\ 2Q & -A^T \end{bmatrix} \right] = 0,$$

или

$$\det \begin{bmatrix} (s_1 E - A) & -0.5BR^{-1}B^T \\ -2Q & (s_1 E + A^T) \end{bmatrix} = 0. \quad (19)$$

Получим характеристическое уравнение, раскрывая определитель в (19)

$$(s_1 E - A)(s_1 E + A^T) - QBR^{-1}B^T = 0. \quad (20)$$

Подставляя $(-s_1)$ в характеристическое уравнение, получим

$$\det \left[\begin{bmatrix} -s_1 E & 0 \\ 0 & -s_1 E \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A & 0.5BR^{-1}B^T \\ 2Q & -A^T \end{bmatrix} \right] = 0,$$

или

$$\det \begin{bmatrix} (-s_1 E - A) & -0.5BR^{-1}B^T \\ -2Q & (-s_1 E + A^T) \end{bmatrix} = 0. \quad (21)$$

Преобразуем выражение (21), используя свойства определителя. Для начала переставим строки. Знак определителя при этом поменяется на противоположный. Изменение знака можно не учитывать, т. к. определитель приравняется к нулю

$$\det \begin{bmatrix} -2Q & (-s_1 E + A^T) \\ (-s_1 E - A) & -0.5BR^{-1}B^T \end{bmatrix} = 0. \quad (22)$$

Затем в определителе (22) поменяем столбцы. Знак определителя также поменяется на противоположный, это изменение также можно не учитывать:

$$\det \begin{bmatrix} (-s_1 E + A^T) & -2Q \\ -0.5BR^{-1}B^T & (-s_1 E - A) \end{bmatrix} = 0. \quad (23)$$

Учитывая, что матрицы Q и R^{-1} симметричные, определитель в правой части (23) транспонируем:

$$\det \begin{bmatrix} -(s_1 E - A) & -0.5BR^{-1}B^T \\ -2Q & -(s_1 E + A^T) \end{bmatrix} = 0. \quad (24)$$

Раскрывая определитель в (24), получим то же выражение, что и в (20), т. е.

$$(s_1 E - A)(s_1 E + A^T) - QBR^{-1}B^T = 0.$$

Исходя из вышеизложенного, можно сделать вывод о том, что если для характеристического уравнения (18) n корней лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости корней, то другие n корней лежат в правой полуплоскости. Будем считать, что характеристическое уравнение (18) или, что равносильно, уравнение (20) имеет различные корни, действительные или комплексные. Для каждого из корней характеристического уравнения (18) или, что то же самое, для каждого собственного значения матрицы A_z можно определить не равную нулю матрицу-столбец $V^{(i)}$, где верхний индекс i указывает на номер корня характеристического уравнения, при котором решалось уравнение (17). При различных корнях характеристического уравнения (18) совокупность решений уравнения (17) называют также собственными векторами соответствующей матрицы. Собственные вектора в рассматриваемом случае относятся к матрице A_z .

Так как все корни s_i , $i = \overline{1, 2n}$ характеристического уравнения различны, то получаем $2n$ частных решений:

$$Z_1 = V^{(1)}e^{s_1 t}, \quad Z_2 = V^{(2)}e^{s_2 t}, \quad \dots, \quad Z_{2n} = V^{(2n)}e^{s_{2n} t}, \quad (25)$$

где

$$V^{(1)} = \begin{bmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \\ \dots \\ v_{2n}^{(1)} \end{bmatrix}, \quad V^{(2)} = \begin{bmatrix} v_1^{(2)} \\ v_2^{(2)} \\ \dots \\ v_{2n}^{(2)} \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad V^{(2n)} = \begin{bmatrix} v_1^{(2n)} \\ v_2^{(2n)} \\ \dots \\ v_{2n}^{(2n)} \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Из решений (25) составим фундаментальную систему решений, т. к. они

являются линейно независимыми, по которой становится возможным записать общее решение однородной системы уравнений (13):

$$Z(t) = \sum_{i=1}^{2n} c_i V^{(i)} e^{s_i t},$$

или

$$Z(t) = c_1 V^{(1)} e^{s_1 t} + c_2 V^{(2)} e^{s_2 t} + \dots + c_{2n} V^{(2n)} e^{s_{2n} t},$$

где c_i , – произвольные постоянные, $i = \overline{1, 2n}$.

Осуществляя переход к составляющим вектора $Z(t)$, получим

$$Z(t) = \begin{bmatrix} X(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 V_x^{(1)} e^{s_1 t} + c_2 V_x^{(2)} e^{s_2 t} + \dots + c_{2n} V_x^{(2n)} e^{s_{2n} t} \\ c_1 V_\lambda^{(1)} e^{s_1 t} + c_2 V_\lambda^{(2)} e^{s_2 t} + \dots + c_{2n} V_\lambda^{(2n)} e^{s_{2n} t} \end{bmatrix},$$

где

$$V_x^{(i)} = \begin{bmatrix} v_1^{(i)} \\ v_2^{(i)} \\ \dots \\ v_n^{(i)} \end{bmatrix}, \quad V_\lambda^{(i)} = \begin{bmatrix} v_{n+1}^{(i)} \\ v_{n+2}^{(i)} \\ \dots \\ v_{2n}^{(i)} \end{bmatrix}.$$

Учитывая, что должны выполняться правые граничные условия (2), в решении для $X(t)$ постоянные интегрирования при экспонентах с положительными корнями характеристического уравнения необходимо принять равными нулю. Количество слагаемых в данном случае в решении будет составлять n , вместо $2n$.

Примем следующие обозначения. Будем считать, что найдены и пронумерованы заново корни характеристического уравнения с отрицательными действительными частями и соответственно этим корням сопоставим постоянные интегрирования вида $s_i, i = \overline{1, n}$ и собственные вектора $\bar{V}_x^{(i)}, \bar{V}_\lambda^{(i)}$. Для $X(t)$ и для $\lambda(t)$ распишем решение с новыми обозначениями, соответствующими отрицательным корням характеристического уравнения (18):

$$X(t) = \bar{c}_1 \bar{V}_x^{(1)} e^{s_1 t} + \bar{c}_2 \bar{V}_x^{(2)} e^{s_2 t} + \dots + \bar{c}_n \bar{V}_x^{(n)} e^{s_n t}, \quad (27)$$

$$\lambda(t) = \bar{c}_1 \bar{V}_\lambda^{(1)} e^{s_1 t} + \bar{c}_2 \bar{V}_\lambda^{(2)} e^{s_2 t} + \dots + \bar{c}_n \bar{V}_\lambda^{(n)} e^{s_n t}, \quad (28)$$

где $\bar{V}_x^{(i)}, \bar{V}_\lambda^{(i)}, i = \overline{1, n}$, могут быть определены для всех отрицательных корней

характеристического уравнения (18) через алгебраические дополнения к одной из строк матрицы $[sE_z - A_z]$. Теперь можно сформировать матрицы собственных векторов по $X(t)$ и по $\lambda(t)$:

$$V_x = [\bar{V}_x^{(1)}, \bar{V}_x^{(2)}, \dots, \bar{V}_x^{(n)}], \quad V_\lambda = [\bar{V}_\lambda^{(1)}, \bar{V}_\lambda^{(2)}, \dots, \bar{V}_\lambda^{(n)}], \quad (29)$$

где V_x, V_λ – матрицы размера $n \times n$, которые по заданному требованию решения уравнения (17) являются невырожденными.

С учетом (29) представим (27), (28) в следующем матричном виде:

$$X(t) = X = V_x P, \quad (30)$$

$$\lambda(t) = \lambda = V_\lambda P, \quad (31)$$

где

$$P = \begin{bmatrix} \bar{c}_1 e^{s_1 t} \\ \bar{c}_2 e^{s_2 t} \\ \dots \\ \bar{c}_n e^{s_n t} \end{bmatrix}.$$

Исходя из (30) определим вектор P в виде

$$P = V_x^{-1} X$$

и подставим в (31):

$$\lambda = V_\lambda V_x^{-1} X. \quad (32)$$

С учетом (32) представим оптимальное управление (9) в виде

$$U = 0.5R^{-1}B^T \lambda = 0.5R^{-1}B^T V_\lambda V_x^{-1} X,$$

или

$$U(X) = K_p X,$$

где K_p – матрица оптимального регулятора $r \times n$:

$$K_p = 0.5R^{-1}B^T V_\lambda V_x^{-1}. \quad (33)$$

В результате получаем решение поставленной задачи (1) – (3).

Для того чтобы проверить расчетное значение (33) можно применить соотношение оптимальности [6]. Ниже приведена данная формула, которая используется как для скалярного, так и для векторного управления:

$$R = B^T S^T Q S B + (E_r + B^T S^T K_p^T) R (E_r + K_p S B), \quad (34)$$

где $S = (A - BK_p)^{-1}$, E_r – единичная матрица размера $r \times r$, в случае если управление является векторным.

Далее использование формулы (34) будет показано на практическом примере.

Результаты эксперимента

Первичными источниками электроэнергии называют устройства, вырабатывающие электроэнергию, которую затем используют в производственных или бытовых целях, например, гидрогенераторы. Источники вторичного электропитания (ИВЭП) называются так, потому что они используют электроэнергию первичных источников для последующего преобразования, т. е. всегда содержат какого-либо вида преобразователи энергии.

ИВЭП предназначены для получения напряжения, необходимого для питания различных электронных устройств. Например, значение действующего фазового напряжения сети переменного тока составляет 220В, в то время как для работы большинства бытовых электроприборов необходимо в десятки раз меньшее постоянное напряжение.

По управлению выходным напряжением различают управляемые и неуправляемые выпрямители. В управляемых системах в качестве выпрямительных элементов используют тиристоры, в неуправляемых – диоды.

Система ТП-ДПТ с НВ – электропривод, в котором двигатель постоянного тока получает питание от тиристорного преобразователя переменного тока в постоянный. Позволяет регулировать угловую скорость двигателя, ток, вращающий момент и другие параметры. Данный ЭМО уже рассматривался ранее в работах [13; 14].

Для проведения эксперимента была выбрана система MATLAB.

Опираясь на [14], объект управления зададим в пространстве состояний следующими матрицами A , B , C и D

$$A = \begin{bmatrix} -95 & 0 & 0 \\ 112.518 & -13.633 & -201.419 \\ 0 & 1.006 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2500 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D = 0.$$

Переменными состояниями выступают напряжение преобразователя, ток двигателя и угловая скорость. Параметры данной системы: $P_{\text{ном}} = 3$ кВт; $U_{\text{ном}} = 220$ В; $I_{\text{ном}} = 147$ А; $\omega_0 = 169$ с⁻¹. Соответственно, начальные условия заданы вектором в виде

$$x_0 = [220, 147, 169].$$

Управление в данном случае является скалярным, поэтому матрица R будет представлена положительным числом. Для значений диагональных элементов матрицы Q примем 0.016. В итоге получаем следующие матрицы

$$R = [80], Q = \begin{bmatrix} 0.016 & 0 & 0 \\ 0 & 0.016 & 0 \\ 0 & 0 & 0.016 \end{bmatrix}.$$

После задания параметров объекта управления (A, B) и матриц квадратичного функционала качества (Q, R) необходимо сформировать коагулированную матрицу A_z , вычислить ее собственные значения и собственные векторы. Программная реализация формирования матрицы A_z и вычисление ее собственных значений (P) и собственных векторов (V) показана в листинге 1.

Листинг 1.

```
Az = [A, 0.5*B*(pinv(R))*B.'];  
      2*Q, -A.'];  
[V, P] = eig(Az);  
L = diag(P);
```

Для транспонирования матриц в MATLAB существует оператор «.'», а также соответствующая функция *transpose()*. Функция *eig()* позволяет возвращать собственные значения и собственные векторы заданной матрицы. С помощью функции *diag()* на основе вектора, представляющего диагональные элементы, формируется диагональная матрица.

Следующим этапом является определение подматриц V_x и V_λ для отрицательных собственных значений матрицы A_z . Программная реализация данного этапа показана в листинге 2.

Листинг 2.

```
p = 0;
for k = 1:length(L)
    if (real(L(k)) < 0)
        p = p + 1;
    Vx(:,p) = V(1:(length(Az)/2), k);
    Vlambd(:,p) = V(((length(Az)/2)+1) : end, k);
    end
end
```

Искомые переменные V перед циклом следует определить как нулевые матрицы соответствующего размера, например, с помощью функции `zeros()`.

Заключительный этап расчета оптимального регулятора K_p приведен в листинге 3.

Листинг 3.

```
Kp = 0.5*pinv(R)*transpose(B)*Vlambd*pinv(Vx);
```

Для обращения матриц рекомендуем использовать функцию псевдообращения `pinv()`, чтобы избежать непредвиденных результатов в случае, если матрицы плохо обусловленные.

В результате расчета были получены следующие коэффициенты матрицы оптимального регулятора K_p :

$$[-0.0115, -0.0089, 0.0146].$$

Проверка результатов эксперимента, основанная на соотношении оптимальности, показана в листинге 4.

Листинг 4.

```
E = ones(1,1);
S = pinv(A+B*Kp);
R0 = B.'*S.'*Q*S*B+(E+B.'*S.'*(-Kp).')*R*(E+(-Kp)*S*B);
disp(abs(norm(R0)-norm(R)));
```

Изменение знака K_p на противоположный связано с тем, что расчет

оптимального регулятора был осуществлен на основе вариационной задачи Лагранжа. В случае, когда необходимо произвести аналитический контроль решения задачи оптимальной стабилизации, которая базируется на матричном уравнении Риккати, следует использовать формулу (34), как показано в работе [1]. Разницу по модулю рекомендуется брать от евклидовой нормы матриц R_0 и R , соответственно. Для вычисления евклидовой нормы в MATLAB существует функция $norm()$. В результате получаем, что нормы исходной и рассчитанной матриц отличаются друг от друга на $2.131628207280301 \cdot 10^{-13}$, следовательно, значения матрицы оптимального регулятора K_p рассчитаны верно с точностью до 13 знака после запятой. Величина $2.131628207280301 \cdot 10^{-13}$ вполне приемлема для объекта управления рассмотренного в данной статье и подобных ему.

После нахождения матрицы K_p имеем дело с синтезированной системой вида

$$\frac{dX(t)}{dt} = (A + BK_p)X(t) + BU(t). \quad (35)$$

Построение кривых изменения напряжения, тока и угловой скорости произведено с помощью системной функции $step()$, т. е. на вход системы (35) подается единичное входное воздействие при нулевых начальных условиях.

Диаграмма изменения переменных состояния синтезированной оптимальной по квадратичному функционалу системы автоматического управления (САУ) показана на рис. 1.

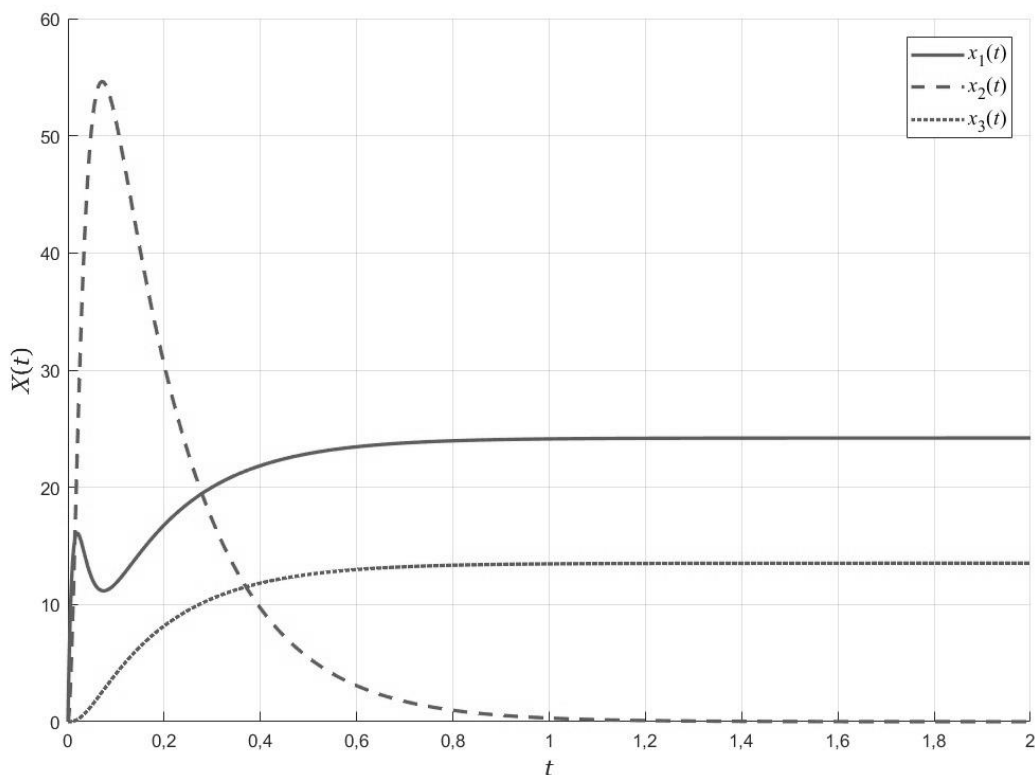


Рис. 1. Изменения переменных состояния оптимальной САУ

Как видно из рисунка 1, для переменных x_1 , x_2 и x_3 , характеризующих напряжение преобразователя, ток двигателя и угловую скорость, соответственно, наблюдается переход в установившиеся значения.

Выводы

Матричные операции, численный анализ, которые хорошо разработаны во многих системах программирования [14], позволяют реализовать данный подход к решению задачи оптимальной стабилизации не только в MATLAB, но и, например, в Python. При этом, как показано в статье [14], отличия в расчетах будут минимальны, более того, в зависимости от объекта управления, Python может иметь некоторые преимущества.

Классический расчет матрицы оптимального регулятора на основе решения матричного уравнения Риккати предполагает решение $\frac{n(n+1)}{2}$ нелинейных уравнений. Если использовать данный подход, т. е. находить решение через собственные значения и векторы, то количество собственных

значений будет составлять $2n$. Легко показать, что, начиная с $n = 4$, будет иметь место неравенство $2n < \frac{n(n+1)}{2}$.

Библиографический список:

1. Мишин П. А., Немчинова П. А. АНАЛИТИЧЕСКИЙ КОНТРОЛЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ СТАЦИОНАРНОГО ОБЪЕКТА С ВЕКТОРНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ //E-Scio. – 2022. – №. 4 (67). – С. 231-238.
2. Мишин П. А., Немчинова П. А. АНАЛИТИЧЕСКИЙ КОНТРОЛЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ СТАЦИОНАРНОГО ОБЪЕКТА С ВЕКТОРНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ //МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ. – 2022. – С. 377-378.
3. Афонин В. В. Аналитический контроль решения задачи оптимальной стабилизации стационарного объекта со скалярным управлением // Вестник Мордовского университета. – 1998. – №3-4. – С. 122-123.
4. Афонин В. В., Мурюмин С. М. Обратные задачи оптимальной стабилизации со скалярным управлением // Инженерные технологии и системы. – 2017. – Т. 27, №. 4. – С. 504-517.
5. Баврин И. И., Матросов В. Л. Высшая математика //М.: Просвещение. – 1980. – С. 452.
6. Афонин В. В., Мурюмин С. М. Соотношения оптимальности в линейно-квадратичной задаче управления // Журнал Средневолжского математического общества. – 2014. – Т. 16, № 2. – С. 118-120.
7. Юревич Е. Теория автоматического управления, 4 изд. – БХВ-Петербург, 2016. – 560 с.
8. Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического регулирования. – Спб.: Профессия, 2003. – 752 с.
9. Задорожний В. Г. Методы вариационного анализа. – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных

исследований, 2006. – 316 с.

10. Эльсгольц Л. Э. и др. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1965. – 424 с.

11. Бабаков Н. А., Воронов А. А., Воронова А. А. Теория автоматического управления: учеб. для вузов по спец. «Автоматика и телемеханика». В 2-х ч. Ч1 Теория линейных систем автоматического управления. – 1986. – 367 с.

12. Матвеев Н. М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Учебное пособие. – Минск: Высшэйшая школа, 1967. – 307 с.

13. Кибардин В. В., Ковалева О. А., Язев В. Н. Критерии оптимального управления и lqr-оптимизация в электроприводе //Вестник Красноярского государственного аграрного университета. – 2015. – №. 12. – С. 61-73.

14. Мишин П. А., Мишина П. А. АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО РЕГУЛЯТОРА НА ОСНОВЕ СООТНОШЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В СИСТЕМЕ МАТЛАВ И ЯЗЫКЕ PYTHON //E-Scio. – 2022. – №. 11 (74). – С. 511-518.