УДК 517.955 **Физико-математические науки**

Бушков Станислав Владимирович, *к.ф.-м.н., доцент, доцент*
Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, г. Самара
Родионова Ирина Николаевна, *к.ф.-м.н., доцент, доцент,*
Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, г. Самара

О ПОСТАНОВКЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ДАННЫМИ НА ПЛОСКОСТИ СИЛЬНОГО ВЫРОЖДЕНИЯ ПОЛНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Аннотация: На множестве $G = \{x, y, z | z < x - y\}$ евклидова пространства рассматривается уравнение гиперболического типа, коэффициенты которого зависят от трех параметров и обращаются в бесконечность на плоскости z = =x-y порядка выше первого. Методом Римана решен ряд краевых задач с данными на плоскости z = x - y при различных значениях параметров.

Ключевые слова: Краевая задача, гиперболическое уравнение, Эйлера-Дарбу, Коши, метод Римана.

Abstract: On the set $G = \{x, y, z | z < x - y\}$ of Euclidean space, a hyperbolic equation is considered, whose coefficients depend on three parameters and turn to infinity on the plane z = x - y of the order above the first. Using the Riemann method, we will solve a number of boundary value problems with data on the z = x - y plane at various parameter values.

Keywords: Boundary value problem, hyperbolic equation, Euler-Darboux, Cauchy, Riemann method.

Введение

Уравнение $U_{xyz}-\frac{1}{x-y-z}(\gamma U_{XY}+$

$+\beta U_{XZ}-\alpha U_{YZ})+\frac{\gamma}{(x-y-z)^2}\cdot$

$\cdot[(\beta-1)\,U_X+(1-\alpha)U_Y+$ (1)

$(1+\gamma--\alpha-\beta)U_Z]+\frac{\delta U}{(x-y-z)^3}=0,$

$\delta=\gamma[\gamma(\gamma-\alpha)+\beta(1-\gamma)+\alpha+\beta-2]$ $,\alpha,\beta,\gamma\in R_1$

рассмотрим на множестве $G=\{(x,y,z)|z<x-y\}$ пространства R_3. Исходя из вида функции Римана уравнения (1) [1]:

$$V(M,M_0)=(x_0-y_0-z_0)^{-\gamma}\frac{(x-y-z)^{\alpha+\beta-\gamma}F(\alpha-\gamma,\beta-\gamma,1;\sigma)}{(x_0-y-z)^{\alpha-\gamma}(x-y_0-z)^{\beta-\gamma}}, \qquad (2)$$

$$\sigma=\frac{(x-x_0)(y_0-y)}{(x_0-y-z)(x-y_0-z)},$$ которая, в силу своих свойств, по переменным

x_0, y_0, z_0 удовлетворяет уравнению (1), решение уравнения на плоскости z = x - y обращается в бесконечность порядка $\gamma(\gamma>0)$ Следовательно, в условия задач с данными на плоскости z = x - y будут входить комбинации самого решения, а также его частных производных первого и второго порядков. Рассмотрена постановка задач при следующих соотношениях коэффициентов:

а) $0<\alpha,\beta,\gamma<1$, $a>\gamma$, $\beta>\gamma$;

б) $\alpha=\gamma$;

в) $\alpha=\beta=\gamma$; $0<\gamma<1$;

г) $\alpha=\beta=\gamma=1$.

Постановка и решение краевых задач

Задача C^*. На множестве G найти решение уравнения (1) с данными (случай(а)):

$$\lim_{z\to x-y-0}(x-y-z)^{\gamma}U(x,y,z)=\tau(x,y),(x,y)\in\overline{D}_0, \qquad (3)$$

$D_0=\{(x,y)|x>y\};$

$$\lim_{z\to x-y}(x-y-z)^{\gamma}[U_z-\gamma(x-y-z)^{-1}U]=\nu(x,y), \qquad (4)$$

$(x, y) \in \overline{D}_0$;

$$\lim_{z \to x-y} (x-y-z)^{\alpha+\beta-\gamma} \big[U_{zx} - U_{zy} + +\gamma(x-y-z)^{-1}\big(U_y - U_x + 2U_z\big) + 2\gamma(1-\gamma)U\big] = \mu(x,y), (x,y) \in \overline{D_0}. \quad (5)$$

Предполагается выполнение условий:

$$\big(\tau_{xy}, \nu_{xy}, \mu_{xy}\big) \in C(\overline{D}_0) \quad (6)$$

Для решения задачи C^* применим метод Римана. Возьмем произвольную точку $M_0(x_0, y_0, z_0) \in G$, построим пирамидоидальную область H_ε, ограниченную плоскостями $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, $z = x - y - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$). В предположении, что решение задачи C^* существует, проинтегрируем тождество Грина [1] по области H_ε. После применения формулы Гаусса-Остроградского и традиционных для данного метода рассуждений [1] получаем

$$3U(x_0, y_0, z_0) - 3(x_0 - y_0 - z_0)^{-q} \cdot$$
$$\cdot U(x_0, y_0, x_0 - y_0 - \varepsilon) + 3(x_0 - y_0 - $$
$$-z_0)^{-q} \int_{y_0}^{x_0 - z_0 - \varepsilon} dy \int_{z_0 + y + \varepsilon}^{x_0} \frac{1}{2} V[U_{xz} -$$
$$-U_{zy} + \gamma(U_y - U_x + 2U_z)\varepsilon^{-1} + 2\gamma \cdot$$
$$\cdot (1-\gamma) \cdot U\varepsilon^{-2}] + \left[\frac{(\alpha+\beta)V}{x-y-z} + \frac{1}{2}(V_y - \right.$$
$$-V_x)] \cdot (U_z + \gamma\varepsilon^{-1}U)dx = 0.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, с учетом условий (3) - (5), после переобозначения переменных получаем функцию

$$U(x, y, z) = (x-y-z)^{-\gamma} \, [\tau(x, y) -$$
$$-\frac{\Gamma(1-\alpha-\beta+2\gamma)}{2\Gamma(1-\alpha+\gamma)\Gamma(1-\beta+\gamma)} \cdot$$
$$\cdot \int_y^{x-z} ds \int_{z+s}^{x} \mu(t, s)(x-t)^{-\alpha+\gamma} \cdot$$

$$\cdot (s-y)^{-\beta+\gamma}\,dt - \frac{\Gamma(\alpha+\beta-2\gamma)}{\Gamma(\alpha-\gamma)\Gamma(\beta-\gamma)} \cdot \qquad (7)$$

$$\cdot \int\limits_{y}^{x-z} ds \int\limits_{z+s}^{x} \nu(t,s)(x-t)^{\beta-\gamma-1} \cdot$$

$$\cdot (s-y)^{\alpha-\gamma-1}(x-t+s-y)^{1-\alpha-\beta+2\gamma}\,dt].$$

Проверкой установлено, что при выполнении условий (6) функция (7) удовлетворяет уравнению (1) и условиям (3)-(5) Действительно, дифференцируем по z тождество (7), делаем в интегралах замену

$s = x - z - (x-y-z)\xi$, получаем

$$U_z = \gamma(x-y-z)^{-1}U + (x-y-z)^{-\gamma}$$

$$\left[\frac{\Gamma(1-\alpha-\beta+2\gamma)}{2\Gamma(1-\alpha+\gamma)\Gamma(1-\beta+\gamma)} \cdot\right.$$

$$\cdot (x-y-z)^{1-\alpha-\beta+2\gamma} \cdot$$

$$\cdot \int\limits_{0}^{1} \mu(x-(x-y-z)\xi, x-z-(x-y-$$

$$-z)\xi)\xi^{-\alpha+\gamma}(1-\xi)^{-\beta+\gamma}\,d\xi -$$

$$- \frac{\Gamma(\alpha+\beta-2\gamma)}{\Gamma(\alpha-\gamma)\Gamma(\beta-\gamma)} \int\limits_{0}^{1} \nu(x-(x-y-$$

$$-z)\xi, x-z-(x-y-z)\xi)\,\xi^{\beta-\gamma-1} \cdot$$

$$\cdot (1-\xi)^{\alpha-\gamma-1}\,d\xi]$$

откуда следует выполнимость условия (4). Аналогично проверяются остальные условия.

Из сказанного выше следует:

Если выполняется условие (6), то функция (7) есть классическое решение уравнения (1) в любой замкнутой области множества G, не содержащей точек плоскости z = x - y. На самой плоскости функция (7) удовлетворяет условиям задачи C^*. Единственность решения задачи C^* следует из метода Римана.

В случае б) $\alpha = \gamma$ решение уравнения

$$U_{xyz}-\frac{1}{(x-y-z)}\left(\gamma U_{xy}+\beta U_{xz}-\gamma\cdot\right.$$
$$\left.\cdot U_{yz}\right)+\frac{\gamma}{(x-y-z)^2}\cdot$$
$$\cdot\left[(\beta-1)U_x-(\gamma-1)U_y-(\beta-1)\cdot\right. \qquad 1^0)$$
$$\left.\cdot U_z\right]+\frac{\gamma(\gamma-1)(\beta-2)}{(x-y-z)^3}U=0$$

не может быть получено из формулы (7) как частный случай, так как второй интеграл при $\alpha=\gamma$ будет расходящимся. Применим метод Римана, функция Римана уравнения (1^0):

$$V(M,M_0)=\frac{(x-y-z)^{\beta}(x-y_0-z)^{\gamma-\beta}}{(x_0-z_0-y_0)^{\gamma}}.$$

<u>Задача C^{**}.</u> На множестве G найти решение уравнения (1^0) с данными (3), (4) и условием

$$\lim_{z\to x-y-0}(x-y-z)^{\beta}\left[U_{xz}+\gamma(U_z-U_x)\cdot\right.$$
$$\cdot(x-y-z)^{-1}-\gamma(\gamma-1)(x-y-z)^{-2}\cdot \qquad (8)$$
$$\left.\cdot U\right]=\mu^*(x,y).$$

Тождество Грина приведено к виду

$$3U(x_0,y_0,z_0)-3U(x_0,y_0,x_0-y_0-\varepsilon).$$
$$V(M,M_0)+3\int_{y_0}^{x_0-z_0-\varepsilon}dy\cdot$$
$$\cdot\int_{z_0+y+\varepsilon}^{x_0}\frac{\varepsilon^{\beta}(y-y_0+\varepsilon)^{\gamma-\beta}}{(x_0-y_0-z_0)^{\gamma}}\left[U_{zx}+\gamma\cdot\right.$$
$$\cdot(U_z-U_x)\varepsilon^{-1}-\gamma(\gamma-1)\varepsilon^{-2}\cdot$$
$$\left.\cdot U\right|_{z=x-y-\varepsilon}\cdot dx+3(x_0-y_0-z_0)^{-\gamma}\cdot$$
$$\cdot\int_{z_0}^{x_0-y_0-\varepsilon}\left[\varepsilon^{\gamma}U_z(z+y_0+\varepsilon,y_0,z)-\right.$$
$$\left.-\gamma\varepsilon^{\gamma-1}U(z+y_0+\varepsilon,y_0,z)dz\right]=0.$$

Перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$, с учетом условий (3), (4), (8). Проверкой показываем, что при выполнении условий (6) функция

$$U(x,y,z) = (x - y - z)^{-\gamma} \cdot$$

$$\cdot \left[\tau^*(x,y) - \int_z^{x-y} \nu^*(y+t,y)\,dt -\right.$$

$$\left. - \int_y^{x-z} ds \int_{z+s}^{x} \mu^*(t,s)(s - y)^{\gamma-\beta}\,dt\right]$$

есть решение задачи C^{**}.

В случае в) получаем уравнение

$$U_{xyz} - \frac{\gamma\left(U_{xy} + U_{xz} - U_{yz}\right)}{x - y - z} + \gamma(\gamma - 1) \cdot$$
$$\cdot \frac{U_x - U_y - U_z}{(x - y - z)^2} + \frac{\gamma(\gamma - 1)(\gamma - 2)U}{(x - y - z)^3} = 0, \tag{9}$$

функция Римана: $V = \left(\frac{x-y-z}{x_0-y_0-z_0}\right)^{\gamma}$.Методом Римана получаем решение уравнения (9)

$$U(x,y,z) = \frac{1}{(x - y - z)^{\gamma}}\left(\tau_2(x,y) -\right.$$
$$- \int_z^{x-y} \nu_2(x, x - t)\,dt +$$
$$\left. + \int_y^{x-z} dt \int_{z+t}^{x} \mu_2(s,t)\,ds\right), \tag{10}$$

удовлетворяющее условиям задачи C^{***}:

$$\lim_{z\to x-y} (x - y - z)^r\, U(x,y,z) = \tau_2(x,y)$$

$$\lim_{z\to x-y} [U_z - \gamma(x - y - z)U](x - y - z)^{\gamma} = \nu_2(x,y)$$

$$\lim_{z\to x-y} \left[(x - y - z)^{\gamma} U_{yz} - \gamma\left(U_z + U_y\right)\cdot\right.$$

$$\cdot (x - y - z)^{\gamma-1} + \gamma(\gamma - 1)\cdot$$

$$\cdot (x-y-z)^{\gamma-z} \cdot U] = \mu_2(x,y).$$

В случае г) получаем уравнение

$$U_{xyz} + \frac{1}{x-y-z}\left(U_{yz} - U_{xz} - U_{xy}\right) = 0.$$

Решение краевой задачи с данными:

$$\lim_{z\to x-y-0}(x-y-z)U(x,y,z) = \tau_3(x,y)$$

$$\lim_{z\to x-y-0}\left(U_z(x-y-z) - U(x,y,z)\right) = \nu_3(x,y), \quad (x,y) \in \overline{D}_0$$

$$\lim_{z\to x-y-0}\left[U_{zy}(x-y-z) - U_y - U_z\right] = \mu_3(x,y),$$

может быть получено как методом Римана, так и как частный случай задачи C^{***} при $\gamma = 1$.

$$U(x,y,z) = (x-y-z)^{-1}\cdot$$

$$\cdot\,[\tau_3(x,y) - \int_z^{x-y} \nu_3(x,x-t)\,dt + \tag{11}$$

$$+\int_z^{x-y} ds \int_y^{x-s} \mu_3(t+s,t)\,dt]$$

τ_3, ν_3, μ_3 удовлетворяют условиям (6).

Из формулы (11) следует, что если в условии задачи положить $\tau_3 \equiv 0$, то функция (11) определяет единственное решение уравнения (1), ограниченное на плоскости $z = x - y$, так как $\lim_{z\to x-y} U(x,y,z) = -\nu_3(x,y)$.

Библиографический список:

1. В.Ф. Волкодавов, Н.Я. Николаев, О.К. Быстрова, В.Н. Захаров. “Функции Римана для некоторых дифференциальных уравнений в n-мерном евклидовом пространстве и их применения.” Изд-во “Самарский университет”, Самара, 1995, с.75.