

Разувай Татьяна Александровна, студент 4 курс, физический факультет

Филиал МГУ в г. Севастополе, Россия, г. Севастополь

ЗАДАЧА О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ПЛОСКОЙ СТРУИ СО СТЕНКОЙ, ИМЕЮЩЕЙ ФОРМУ УГЛА

Аннотация: В статье рассматривается задача о взаимодействии плоской струи идеальной несжимаемой жидкости со стенкой, имеющей форму угла. Хорошо известно, что к плоским задачам гидродинамики идеальной несжимаемой жидкости применим развитый аппарат теории функций комплексного переменного. Задачи теории струй идеальной жидкости относятся к задачам с неизвестной границей. Форма свободной поверхности определяется в процессе решения задачи методом особых точек Чаплыгина. Проведен параметрический анализ полученных уравнений. Для различных параметров в пакете Wolfram Mathematica построены формы свободных поверхностей струй.

Ключевые слова: идеальная жидкость, метод особых точек Чаплыгина, теория струй, комплексный потенциал, годограф скорости, аналитическая функция.

Annotation: The article deals with the problem of the interaction of a plane jet of an ideal incompressible fluid with a wall having the shape of an angle. It is well known that the developed apparatus of the theory of functions of a complex variable is applicable to the plane problems of the hydrodynamics of an ideal incompressible fluid. The problems of the theory of jets of an ideal fluid relate to problems with an unknown boundary. The shape of the free surface is determined in the process of solving the problem by the Chaplygin singular points method. The parametric analysis of the obtained equations is carried out. Shapes of free surfaces of jets are

constructed for various parameters in the Wolfram Mathematica package.

Keywords: ideal fluid, Chaplygin singular point method, jet theory, complex potential, velocity hodograph, analytical function.

Рассматривается плоское потенциальное течение, схема которого изображена на рисунке 1. Струя конечной толщины h падает под углом α на стенку с изломом в точке O и растекается вдоль нее.

На свободных границах BA и BC постоянны давление p_0 и скорость v_0 .

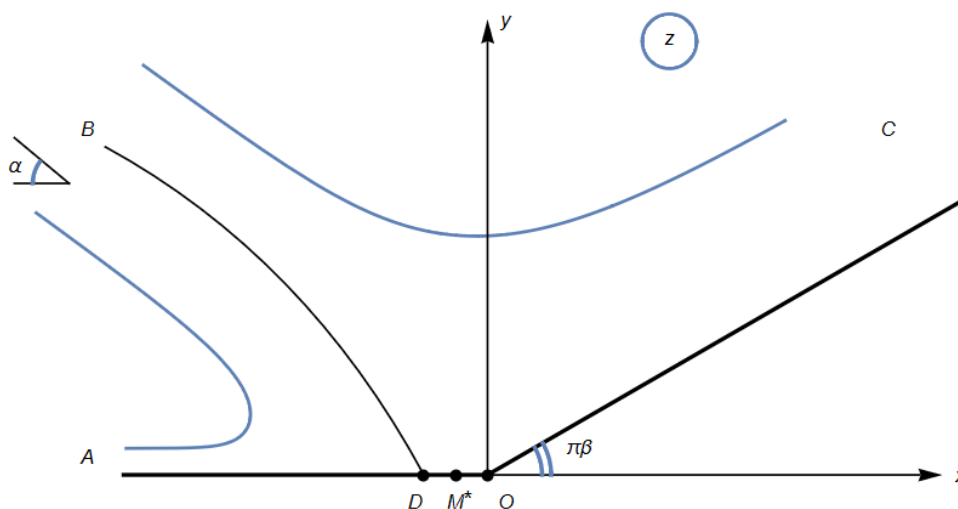


Рис.1 Общая схема течения

Область изменения комплексного потенциала w представляет собой полосу конечной ширины, равной значению расхода q между линиями тока BA и BC . Комплексный потенциал определяется с точностью до произвольной аддитивной постоянной, что позволяет выбирать произвольным образом начало координат в плоскости w .

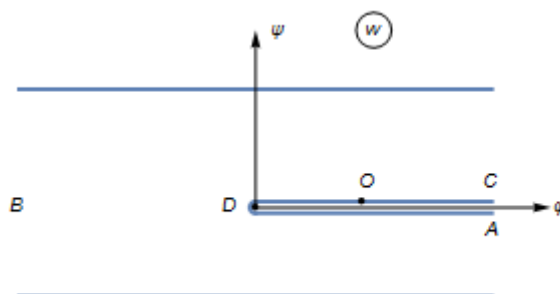


Рис.2 Плоскость комплексного потенциала

Найдем область изменения $\frac{dw}{v_0 dz}$. Примем, что в точке А угол между вектором скорости v_0 и осью ОХ равен $-\pi$: $\vartheta_A = -\pi$, тогда $\vartheta_B = -\frac{\pi}{2} + \alpha$ и $\vartheta_C = \pi\beta$. Определим положение точек на плоскости годографа $\frac{dw}{v_0 dz}$ [2, стр.33]:

$$\frac{dw}{v_0 dz}(C) = \frac{v_0}{v_0} e^{-i\pi\beta} = e^{-i\pi\beta}$$

$$\frac{dw}{v_0 dz}(B) = \frac{v_0}{v_0} e^{-i(\alpha - \frac{\pi}{2})} = \frac{v_0}{v_0} e^{i(\frac{\pi}{2} - \alpha)} = e^{i\frac{\pi}{2}} e^{-i\alpha} = ie^{-i\alpha}$$

$$\frac{dw}{v_0 dz}(D) = v_x - iv_y = 0 \text{ (критическая точка)}$$

$$\frac{dw}{v_0 dz}(A) = \frac{v_0}{v_0} e^{-i(-\pi)} = e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$$

$$\frac{dw}{v_0 dz}(O) = v_x - iv_y = 0 \text{ (критическая точка)}$$

На DO: от точки D в направлении точки O сначала скорость по модулю растет, достигает максимума в некоторой точке M^* , затем на M^*O убывает до нуля.

Найдём также положение точки M^* на плоскости годографа $\frac{dw}{v_0 dz}$:

$$\frac{dw}{v_0 dz}(M^*) = \frac{v^*}{v_0} e^{-i0} = \frac{v^*}{v_0} < 1$$

Модуль комплексной скорости $\frac{dw}{dz}$, равный модулю скорости жидкости, постоянен на свободных поверхностях ВА и ВС, а свободные поверхности ВА и ВС являются в плоскости $\frac{dw}{v_0 dz}$ дугами окружности единичного радиуса.

Областью изменения $\frac{dw}{v_0 dz}$ является внутренность верхнего сектора круга единичного радиуса с разрезом от нуля до точки M^* .

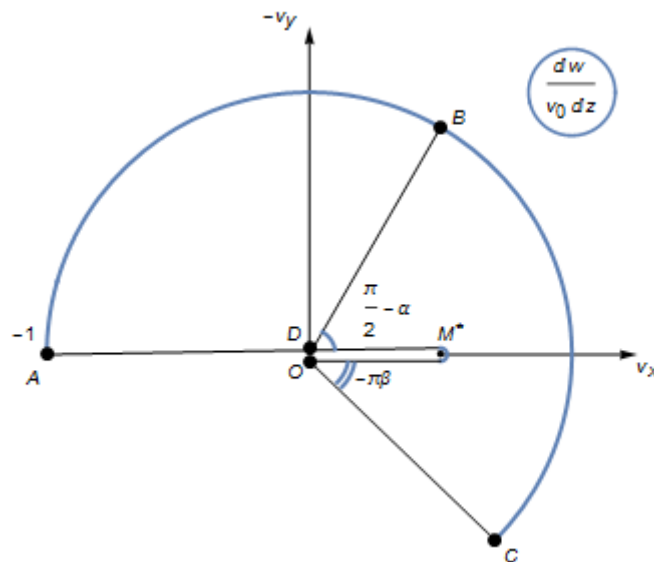


Рис.3 Плоскость годографа скорости

Решение задачи будем проводить по методу особых точек Чаплыгина [1, с. 42]. В качестве вспомогательной параметрической области и выберем правый верхний квадрант (Рис.4). На границе области и можно произвольным образом, но с учетом принципа соответствия границ, выбрать положение трех точек. Пусть точка А помещена в начало координат, точка С – в бесконечно удаленную точку, а точка В – в $u=i$ мнимой оси. В этом случае точке D соответствует некоторая точка $u=d$ вещественной оси, а точке О соответствует некоторая точка $u=a$ также вещественной оси.

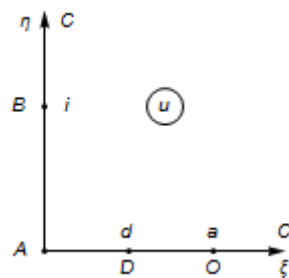


Рис.4 Плоскость параметрического переменного

Для построения отображения $\frac{dw}{v_0 dz}(u)$ необходимо сначала проанализировать нули и особенности, которые имеет эта функция в

характерных точках плоскости u [1, с. 43]. В точке D функция $\frac{dw}{v_0 dz}(u)$ имеет ноль первого порядка, в точке O – особенность вида $(u - a)^\beta$, в точках A, B и C функция $\frac{dw}{v_0 dz}(u)$ нулей и особенностей не имеет. При аналитическом продолжении этой функции на всю комплексную плоскость u в точке $u=-a$ следует поместить особенность вида $\frac{1}{(u+a)^\beta}$, а в точку $u= -d$ — полюс первого порядка. Тогда продолженная на всю плоскость u функция $\frac{dw}{v_0 dz}(u)$ будет иметь вид:

$$\frac{dw}{v_0 dz}(u) = M \frac{(u-a)^\beta (u-d)}{(u+a)^\beta (u+d)} \quad (1).$$

Рассмотрим функцию $w(u)$. При обходе точки $u=d$ по бесконечно малой полуокружности против часовой стрелки, $\arg(u-d)$ увеличивается на π , а $\arg(w)$ увеличивается на 2π . Значит, в точке $u=d$ функция $w(u)$ имеет ноль второго порядка, а функция $\frac{dw}{du}(u)$ – ноль первого порядка. В точках A, B и C функция $w(u)$ имеет логарифмические особенности, а $\frac{dw}{du}(u)$ – полюса первого порядка. В точке O : $w(u) = w(a) + (u - a)^{\frac{\pi}{\pi}} P(u) = w(a) + (u - a)P(u)$ $w(a) \neq 0$, следовательно $\frac{dw}{du}(u)$ не имеет ни нуля, ни особенности в точке $u=a$.

При аналитическом продолжении функции $\frac{dw}{du}(u)$ на всю плоскость u в точке $u=-d$ следует поместить ноль первого порядка, а в точке $u=-i$ – полюс первого порядка. [1, стр. 45, 2, стр.92] Тогда продолженная на всю плоскость u функция $\frac{dw}{du}(u)$ будет иметь вид:

$$\frac{dw}{du}(u) = N \frac{(u-d)(u+d)}{u(u-i)(u+i)} = N \frac{u^2-d^2}{u(u^2+1)} \quad (2).$$

Необходимо определить неизвестные величины M, N , a и d . [2, стр.33]

Постоянная N может быть выражена через расход q в струе B . Разложение (2) в окрестности точки $u=i$ имеет вид [2, стр.80]: $\frac{dw}{du}(i) = N \frac{(i-d)(i+d)}{i(i+i)} \frac{1}{u-i} + \dots =$

$$N \frac{-1-d^2}{2ii} \frac{1}{u-i} + \dots = N \frac{d^2+1}{2} \frac{1}{u-i} + \dots$$

Интегрирование этого выражения по бесконечно малой полуокружности вокруг $u=i$ дает [2, с. 45] :

$$iq = N \frac{d^2+1}{2} i\pi$$

Действительно, интеграл от $\frac{dw}{du}(u)$ определяет изменение функции $w(u)$ при переходе через $u=i$, т.е. равен скачку $\text{Im}(w(u))$ на величину расхода жидкости в струе. С другой стороны, при интегрировании по этой дуге выражения $\frac{1}{u-i}$ получается πi , а интеграл по бесконечно малому контуру от голоморфной части разложения равен нулю [2, с. 45].

Откуда $N = \frac{2q}{\pi(d^2+1)}$

$$\frac{dw}{v_0 dz}(C) = e^{-i\pi\beta} = M \frac{u^\beta \left(1-\frac{a}{u}\right)^\beta u \left(1-\frac{d}{u}\right)}{u^\beta \left(1+\frac{a}{u}\right)^\beta u \left(1+\frac{d}{u}\right)} = M$$

$$M = e^{-i\pi\beta}$$

$$\frac{dw}{v_0 dz}(B) = e^{-i\pi\beta} \frac{(i-a)^\beta (i-d)}{(i+a)^\beta (i+d)} = i e^{-i\alpha}$$

$$\frac{i-d}{i+d} \left(\frac{i-a}{i+a}\right)^\beta = i e^{i(\pi\beta-\alpha)}$$

$$\frac{1+id}{1-id} \left(\frac{i-a}{i+a}\right)^\beta = e^{i(\pi\beta-\alpha)} \quad (3)$$

$$|D0| = l = \int_a^d \left| \frac{dz}{du} \right| d\xi \quad (4)$$

$$\frac{dw}{dz}(u) = v_0 e^{-i\pi\beta} \frac{(u-a)^\beta (u-d)}{(u+a)^\beta (u+d)}$$

$$\frac{dz}{du}(u) = \frac{\frac{dw}{du}(u)}{\frac{dw}{dz}(u)} = \frac{2q}{\pi(d^2+1)} \frac{e^{i\pi\beta}}{v_0} \frac{u^2 - d^2}{u(u^2+1)} \frac{(u+a)^\beta (u+d)}{(u-a)^\beta (u-d)} =$$

$$\frac{2h}{\pi(d^2+1)} e^{i\pi\beta} \frac{(u+d)^2 (u+a)^\beta}{u(u-a)^\beta (u^2+1)} \quad (5)$$

Условия (3) и (4) позволяют найти величины a и d , но данная система сложна для решения, поэтому будем фиксировать значение a , затем по формуле

(3) находить соответствующее значение d , а потом можно при известных a и d можно по формуле (4) вычислить $|DO|$ [3; 4].

Интегрируя (5) можно получить выражение для $z(u)$ в параметрическом виде[5]. Зная $z(u)$ можно построить формы свободных поверхностей для различных углов натекания α , а также рассчитать основные характеристики течения. В качестве примера построены свободные поверхности для различных характерных параметров (Рис.6) [6]:

1. $\alpha = \frac{\pi}{4}, \beta = -\frac{2}{3}, a=3$
2. $\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = -\frac{1}{3}, a=2.1$
3. $\alpha = \frac{7\pi}{10}, \beta = -\frac{2}{3}, a=3.1$
4. $\alpha = \frac{\pi}{6}, \beta = \frac{3}{20}, a=3.1$

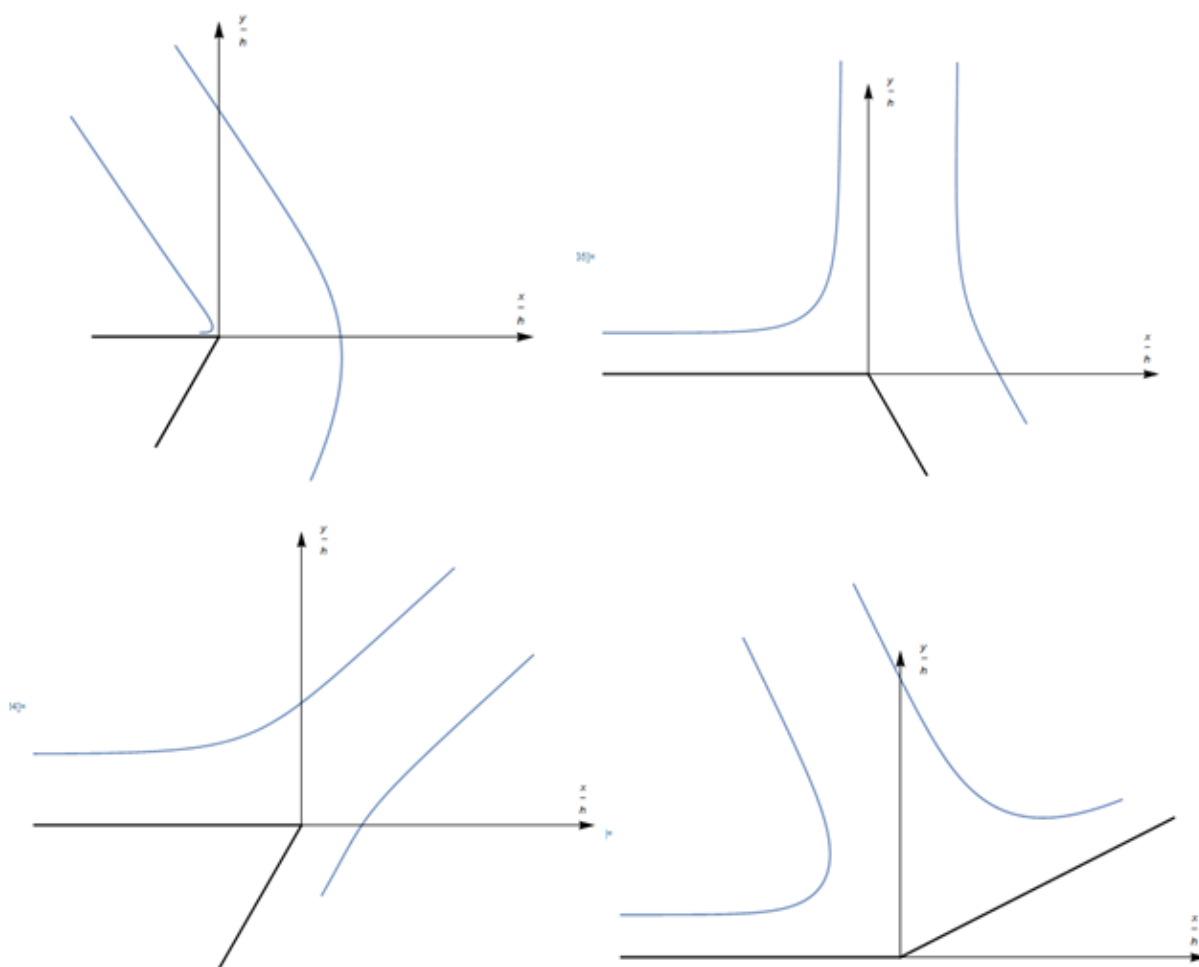


Рис.6 Взаимодействие струи со стенкой при различных значениях параметров

Библиографический список:

1. Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979. 536с.
2. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965. 736с.
3. Толоконников С.Л. Введение в теорию струйных течений идеальной несжимаемой жидкости, МГУ, 2008, 59с.
4. Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны. М: Мир, 1964, 466с.
5. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1977. 444с.
6. Дьяконов В.П. Mathematica 5/6/7//ДМК.2010.