УДК 539.3 **Технические науки**

Шадт Михаил Андреевич, *студент 4 курс, физический факультет*
Филиал МГУ в г. Севастополе, Россия, г. Севастополь

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИИ БАЛКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПРИЛОЖЕННОЙ СИЛЫ

Аннотация: В статье рассматривается задача о моделировании деформации закрепленной с одной стороны балки при различных граничных условиях. Данная задача важна как часть других более сложных задач сопротивления материалов. Сопротивление материалов является наиболее общей наукой о прочности машин н сооружений. Без фундаментального знания сопротивления материалов немыслимо создание различного рода машин и механизмов, гражданских и промышленных сооружений, мостов, линий электропередач и антенн, ангаров, кораблей, самолетов и вертолетов, турбомашин и электрических машин, агрегатов атомной энергетики, ракетной и реактивной техники и др. Дифференциальное уравнение в частных производных, к которому приводится данная задача, решается методом конечных элементов с пакете Wolfram Mathematica.

Ключевые слова: деформация, сопротивление материалов, метод конечных элементов, балка, дифференциальное уравнение в частных производных, граничные условия.

Annotation: The article deals with the problem of modeling the deformation of a beam fixed on one side under various boundary conditions. This task is important as part of other more complex problems of material resistance. The resistance of materials is the most general science of the strength of machines and structures. Without a fundamental knowledge of the resistance of materials, it is unthinkable to create various kinds of machines and mechanisms, civil and industrial structures, bridges, power lines and antennas, hangars, ships, airplanes and helicopters, turbomachines and electric machines, nuclear power units, rocket and jet technology, etc. The partial differential equation to which this problem is reduced is solved by the finite element method using the Wolfram Mathematica package.

Keywords: deformation, resistance of materials, finite element method, beam, partial differential equation, boundary conditions.

Рассматривается плоская задача о деформации балки, в том случае, когда к правому ее концу прилагается сосредоточенная сила. Левый конец балки при этом жестко закреплен. Вид балки при отстутствии деформации показан на Рис.1. Балка имеет следующие геометрические размеры: длина 5, ширина 1. К физическим параметрам системы относятся: модуль Юнга E, коэффициент Пуассона ν, плотность материала балки ρ.

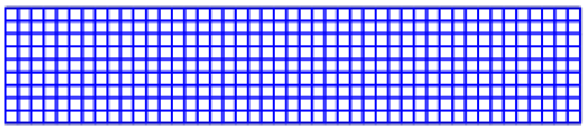

Рис.1 Вид балки при отстсутствии деформации

Предположим, что массовые силы отсутствуют. Линейную силу, действующую на элемент ds, обозначают Fds. F – сила отнесенная к единицы длины, ее называют напряжением [1; 2; 4]. Напряжение $\vec{F}$ в данной точке зависит от направления элемента (оно имеет тензорный характер). В частности, напряжения, отнесенные к элементам, перпендикулярным осям x и y, соответственно обозначают $\overrightarrow{F_x}$ и $\overrightarrow{F_y}$. Величины $\overrightarrow{F_x}$ и $\overrightarrow{F_y}$ – векторные, для их компонент примем обозначения X_x, Y_x и X_y, Y_y, так что $\overrightarrow{F_x} = X_x + iY_x$, $\overrightarrow{F_y} = X_y + iY_y$. Величины X_x и Y_yпринято называть нормальными, а Y_x и X_y – касательными напряжениями.

В теории упругости выводятся следующие уравнение равновесия, связывающие компоненты напряжения [2; 3]:

$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} = 0 \;\; \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} = 0$, доказывается также, что $X_y = Y_x$.

Под действием упругих сил тело подвергается деформации, т.е. изменяются расстояния между точками тела. Обозначим $x^* = f_1(x,y)$, $y^* = f_2(x,y)$ новые (после деформации) координаты точки (x,y) тела и разности $u_1 = x^* - x$, $u_2 = y^* - y$ назовем компонентами смещения. Компоненты смещения в плоской задаче являются функциями двух действительных переменных x,y. Будем считать компоненты смещения, а также их частные производные столь малыми, что их произведениями и квадратами можно пренебречь. Величины $e_{xx} = \frac{\partial u_1}{\partial x}$, $e_{yy} = \frac{\partial u_2}{\partial y}$, $e_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)$ называются компонентами деформации. Напряжения выражаются через физические параметры системы следующим образом [3; 5]:

$$X_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(e_{xx}(1-\nu) + \nu e_{yy}\right)$$

$$Y_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(e_{yy}(1-\nu) + \nu e_{xx}\right)$$

$$X_y = Y_x = \frac{E}{1+\nu} e_{xy}$$

Как доказывается в теории упругости, при сделанных предположениях можно ввести функцию напряжений $U(x,y)$, которая удовлетворяет бигармоническому уравнению [2; 3; 4] : $\Delta\Delta U = \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0$ (1). Решение данного уравнения произведем численно методом конечных элементов в пакете Wolfram Mathematica [6]. В точке x=0 поставим нулевое условие Дирихле, а в точке x=5 (правый конец балки) поставим условие Неймана равное 1 (Рис.2) и равное 5 (Рис.3), что эквивалентно приложенной к правому концу силе соответственно в 1Н и 5Н.

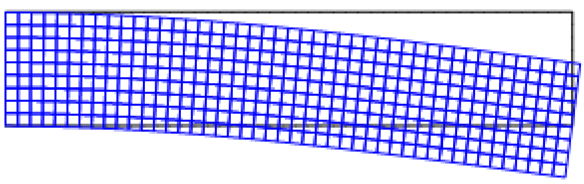

Рис.2 Нагружение правого конца балки силой 1Н

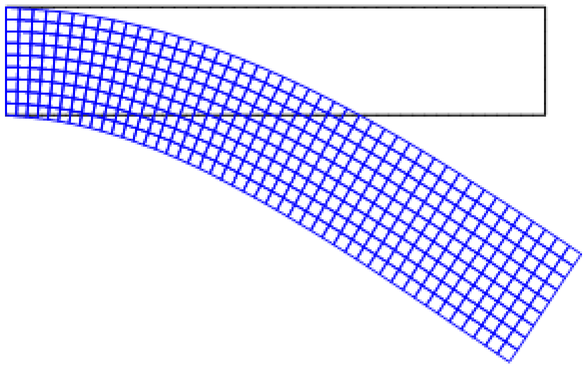

Рис.3 Нагружение правого конца балки силой 5Н

Библиографический список:

1. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. Физматгиз. 1963. 641с.

2. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965. 736с.

3. Колосов Г.В. Применение комплексной переменной к теории упругости. ОНТИ. 1935. 279 с.

4. Мусхешвилли Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. Физматгиз.1963.549с.

5. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1977. 444с.

6. Дьяконов В.П. Mathematica 5/6/7//ДМК.2010.

Literature

1. Gakhov F.D. Boundary value problems. Fizmatgiz. 1963. 641s.

2. Lavrentiev M.A., Shabat B.V. Methods of the theory of functions of a complex variable. M.: Nauka, 1965. 736s.

3. Kolosov G.V. Application of a complex variable to the theory of elasticity. ONTY. 1935. 279 p.

4. Muskhelishvili N.I. Singular integral equations. Fizmatgiz.1963.549p

. 5. Privalov I.I. Introduction to the theory of functions of a complex variable. M.: Nauka, 1977. 444s.

6. Dyakonov V.P. Mathematica 5/6/7//DMK.2010.