УДК 372.8:51(075.8) **Физико-математические науки**

Расаева Диана Ришатовна, *студент факультета математики и информационных технологий, СФ УУНиТ*

Воистинова Гюзель Хамитовна, *кандидат педагогических наук, доцент СФ УУНиТ, Россия, г. Стерлитамак*

ОДИН ИЗ СПОСОБОВ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ

Аннотация: статья посвящена рассмотрению одного из нетривиальных способов решения уравнений. При решении уравнений степеней выше второй ученики часто испытывают определенные трудности. В данной статье рассматривается метод решения уравнений высших порядков разложением многочленов на множители с помощью схемы Горнера.

Ключевые слова: уравнения, решение уравнений, разложение многочленов на множители, схема Горнера.

Annotation: the article is devoted to the consideration of one of the nontrivial ways of solving equations. When solving equations of degrees higher than the second, students often experience certain difficulties. This article discusses a method for solving higher-order equations by factoring polynomials using the Gorner scheme.

Keywords: equations, solution of equations, decomposition of polynomials into multipliers, Gorner scheme.

По мнению одного из авторов статьи, Г.Х. Воистиновой [1], часто сложный вид уравнения пугает школьников и многие из них даже не приступают к его решению. Это касается и уравнений высших порядков. Конечно, метод разложения многочленов на множители известен школьникам, но не всегда ученики владеют приемами группировки, не могут сходу угадать корень и понизить степень уравнения делением на одночлен. Знакомство школьников схемой Горнера, на наш взгляд, могло бы помочь им справляться с решением уравнений степеней выше второй и позволило бы освоить метод разложения на множители.

Применяя схему Горнера, можно легко и быстро находить корни уравнений высших степеней, которые на первый взгляд кажутся довольно громоздкими. Также схема актуальна при решении задач, связанных с разложением многочленов на множители и делении многочлена на двучлен. Многие при делении многочлена на двучлен используют, так называемое, деление столбиком, применение схемы Горнера для нахождения частного от деления многочлена на двучлен позволит это сделать гораздо быстрее, а вычисления уже не будут казаться такими объемными и громоздкими.

Рассмотрим схему Горнера и метод разложения на множители, используя данную схему.

Суть метода разложения на множители состоит в том, чтобы с помощью путем равносильных преобразований представить выражение в левой части уравнения в виде произведения двух или более выражений, содержащих переменную в меньшей степени. Если левая часть уравнения представляет собой многочлен, то представить данный многочлен в виде произведения многочленов (или многочлена и одночлена) более низких степеней. Знание схемы Горнера позволяет легко раскладывать многочлены на множители.

Горнер Уильям Джордж (1786-1837) – английский математик. Разработал (1819) способ приближенного решения уравнений любой степени, который несколько раньше предложил П. Руффини (1804). Это важный, для алгебры, способ деления многочлена на двучлен, названный схемой Руфини-Горнера. В действительности эта техника была сначала издана китайскими математиками и возможно была известна еще ранее [4]. Именем Горнера названа схема деления многочлена на двучлен $x - c$.

Схема Горнера – простой алгоритм получения частного от деления многочлена, у которого старшая степень больше 2, т.е. $n > 2$. такое, что:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n \quad [2]$$

и делится на двучлен:

$$g(x) = x - a$$

где a_0, a_1, a_2, … , a_n – коэффициенты заданного многочлена;

x_0, x_1, x_2, … , x_n – неизвестные переменные многочлена.

Для использования схемы заполняется таблица (Табл. 1), где коэффициенты многочлена записываются в первую строку, а первым элементом второй строки будет являться число a.

Таблица 1. Схема Горнера

	a_0	a_1	a_2	…	a_{n-1}	a_n
c	b_0	b_1	b_2	…	b_{n-1}	$b_n = r$

Формулы вычисления элементов второй строки [3]:

$$b_0 = a_0,\ b_1 = cb_0 + a_1,\ b_2 = cb_1 + a_2, \dots,\ b_{n-1} = cb_{n-2} + a_{n-1},\ r = cb_{n-1} + a_n.$$

Частное $q(x)$ при делении $f(x)$ на $g(x)$ имеет вид:

$$q(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \dots + b_{n-2}x + b_{n-1}$$

Выполнив деление многочлена на двучлен, получим многочлен, у которого старшая степень на единицу меньше исходного.

Если остаток $r = 0$, то исходное уравнение делится без остатка.

Рассмотрим примеры разложения многочлена на множители.

Задача 1. Найти частное при делении многочлена $3x^3 – 2x – 20$ на $x – 2$.

Для начала запишем многочлен в стандартном виде, т.к. для правильного оформления таблицы нужно правильно выписать все коэффициенты, стоящие перед x, получаем $3x^3 + 0x^2 – 2x – 20$.

Составим таблицу, используя схему Горнера и рассмотренные выше формулы (Табл. 2).

Таблица 2. Схема Горнера

	a_0=3	a_1=0	a_2=-2	a_3=-20
c=2	b_0= a_0=3	b_1=cb_0+a_1=2×3+0=6	b_2=cb_1+a_2=2×6+ +(-2)=12-2=10	b_3=cb_2+a_3=2×10+ +(-20)=20-20=0

Теперь запишем получившийся многочлен (не забывая о том, что теперь старшая степень многочлена должна быть на 1 меньше старшей степени предыдущего), в котором 3, 6, 10, 0 – это коэффициенты, стоящие перед x в многочлене: $(3x^3 – 2x – 20)/(x – 2) = 3x^2 + 6x + 10$.

Рассмотрим пример решения уравнения с помощью схемы Горнера.

Задача 2. Решить уравнение $x^4 + 4x^3 – 2x^2 - 12x + 9 = 0$, найти целочисленные корни.

Сначала находим делители свободного члена (обозначим его за a_n). a_n= 9; делители 9: ±1; ±3; ±9.

Внесем необходимые данные в таблицу (Табл. 3). В верхнюю строку – коэффициенты, по порядку стоящие при многочлене, в первый столбец – делители свободного члена.

Таблица 3. Схема Горнера

	1	4	-2	-12	9
1	1	5	3	-9	0
-1	1	3	-5	-8	17
3	1	7	19	45	144
-3	1	1	-5	3	0
9	1	13	115	1023	9216
-9	1	-5	43	399	-3582

Если остаток равен нулю, значит число, стоящее в первом столбце и в той же строке, что и остаток, является корнем уравнения.

Заполнив схему Горнера, получаем корни уравнения: $x_1 = 1$, $x_2 = –3$.

Важно отметить, что количество полученных корней не должно быть больше чем степень многочлена. В данной задаче степень у старшего члена многочлена равна 4, значит, корней не должно быть больше чем 4.

Несмотря на то, что схема Горнера актуальна только для тех многочленов, у которых корнями являются целые числа, можно сделать вывод о том, что решать уравнения высших степеней довольно просто и быстро. Овладев данным способом, школьники научатся раскладывать многочлены на множители и решать уравнения степеней выше второй.

Библиографический список:

1. Воистинова Г.Х. Методические рекомендации по решению нестандартных уравнений // Современные проблемы науки и образования. – 2021. – № 6. – URL: https://science-education.ru/ru/article/view?id=31403 (дата обращения: 24.01.2023).

2. Гашков С.Б. Современная элементарная алгебра в задачах и упражнениях. – М.: Изд-во МЦНМО, 2006. – 155 с.

3. Епихин Е.В. Алгебра и теория пределов. Элективный курс: Учебное пособие. – М.: БИНОМ, 2006. – 280 с.

4. Горнер Уильям Джордж // Образовательный ресурс. – URL: https://www.sites.google.com/site/mnogocleny/istoriceskaa-spravka (дата обращения: 19.01.2023).