УДК 372.851 **Психолого-педагогические науки**

Воистинова Гузель Хамитовна, *доцент педагогических наук,*
СФ УУНиТ, г. Стерлитамак
Хасанова Гульнара Зинуровна, *студент,*
СФ УУНиТ, г. Стерлитамак

РЕШЕНИЕ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ СРЕДСТВАМИ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

Аннотация: В статье рассматривается использование элементов дискретной математики при решении олимпиадных задач. Описываются преимущества использования формул дискретной математики, приводятся приемы решения олимпиадных задач и даются рекомендации по подготовке учащихся к решению олимпиадных задач.

Ключевые слова: дискретная математика, олимпиадные задачи, комбинаторика.

Annotation: The article discusses the use of discrete mathematics in solving Olympiad problems. The advantages are described and the necessary methods and techniques of solving are listed, as well as recommendations for preparing students for solving Olympiad problems are given.

Keywords: Discretemathematics, Olympiadtasks, skills, group.

Знание правил и формул дискретной математики дает преимущества при решении олимпиадных задач, экономит время на их решение. Поэтому знакомство школьников с элементами дискретной математики позволит повысить их шансы при решении нестандартных задач.

Дискретная математика может быть использована для решения многих задач, включая:

1. Комбинаторные задачи, такие как подсчет числа перестановок, сочетаний и размещений.
2. Задачи на графах, такие как поиск кратчайшего пути между двумя вершинами, определение наличия цикла в графе и т.д.
3. Задачи на теорию чисел, такие как поиск наибольшего общего делителя двух чисел, определение простых чисел и т.д.
4. Задачи на логику и алгоритмы, такие как построение алгоритмов сортировки, поиска и т.д.
5. Задачи на теорию вероятностей, такие как определение вероятности наступления события и т.д.
6. Задачи на теорию информации, такие как определение энтропии и кодирования информации.
7. Задачи на теорию игр, такие как определение оптимальной стратегии в игре.
8. Задачи на теорию групп и алгебры, такие как определение свойств групп и алгебраических структур.
9. Задачи, решаемые использованием принципа Дирихле.

Дискретная математика играет важную роль на олимпиаде по математике, так как решения многих задач по математике, представленных на олимпиадах, основываются на принципах дискретной математики.

Олимпиадные задачи из разных областей знаний могут быть решены с помощью различных методов дискретной математики. Некоторые примеры решений задач:

Задача о максимальной разности - дано множество целых чисел, необходимо определить максимальную разницу между любыми двумя из них. Решение: отсортировать множество чисел по возрастанию, затем вычислить разницу между последним и первым элементами.

Задача о графах - дан граф и необходимо определить, является ли он деревом. Решение: применить теорему об эйлеровом пути и цикле - если граф связный и у него нет циклов, то он является деревом.

Задача по комбинаторике - дано множество объектов и необходимо определить количество способов выбрать из него подмножество определенного размера. Решение: применить формулу сочетаний, которая гласит, что количество способов выбрать k элементов из n равно n!/(k!(n-k)!).

Задача на поиск максимального потока в графе - дан ориентированный граф, в котором некоторые ребра имеют ограничения на пропускную способность. Необходимо определить максимальный поток из истока в сток. Решение: применить алгоритм Форда-Фалкерсона для нахождения максимального потока.

Задача на криптографию - даны зашифрованные сообщения, необходимо расшифровать их. Решение: применять методы анализа частотности символов в сообщении, основанные на том, что в некоторых языках некоторые буквы встречаются чаще, чем другие.

Это лишь некоторые примеры решений задач средствами дискретной математики. Результаты могут быть достигнуты с использованием различных методов, иногда требующих использования нескольких методов в комбинации.

Такие задачи может решить каждый школьник, но знание элементов дискретной математики облегчит решение в несколько раз.

В школе элементы дискретной математики обычно изучаются в рамках курса математики или информатики. Основные разделы, которые рассматриваются в школе:

- Теория множеств и логика. В этой части курса ученики знакомятся с основными понятиями теории множеств и логики, такими как множество, подмножество, отношение, функция, аксиомы, доказательство и т.д.

- Комбинаторика. Здесь рассматриваются различные задачи на перестановки, сочетания, размещения, бинарные строки и т.д.

- Теория графов. Эта часть курса посвящена изучению графов и их свойств, таких как связность, циклы, деревья и т.д.

- Теория алгоритмов. Здесь ученики знакомятся с основными понятиями алгоритма, сложности алгоритмов, сортировкой и поиском данных.

В помощь учителю математики можно рекомендовать, например, следующие пособия: «Дискретная математика для школьников и студентов» [5], «Дискретная математика. Учебное пособие для старшеклассников и абитуриентов» [1].

Приведем упражнения, которые будут полезны при подготовке школьников к олимпиадам:

1. Сколькими способами можно разбить группу на команды, если в каждой должно быть определенное количество человек?

Полезным будет разбиение множества на подмножества.

2. Какие области связности есть в графе?

Полезным будет использование элементов теории графов.

3. Дано несколько утверждений, какие из них верны, а какие ложны?

Знание элементов математической логики поможет решать такие задачи.

4. Сколько операций требуется для выполнения алгоритма?

Определение сложности алгоритма позволит эффективно решать задачи данного вида.

По мнению С.В. Клименко [4], преимущества использования элементов дискретной математики на олимпиадах в школе следующие:

- Ясность формулировок задач. В отличие от некоторых других предметов, у дискретной математики задачи выражены ясно и понятно, без лишних условностей и неопределенностей.

- Логика мышления. Решение задач дискретной математики требует аналитического и логического мышления, что благоприятно влияет на развитие соответствующих навыков.

- Независимость от региональных особенностей. В отличие от других школьных предметов, где особенности региона могут сильно влиять на успех учеников, задачи дискретной математики формулируются достаточно универсально и не зависят от конкретных региональных условий.

- Гибкость. Дискретная математика позволяет ученикам проявить свои творческие способности и искать нестандартные решения задач.

- Подготовка к будущей профессиональной деятельности. Отличное знание дискретной математики позволит в дальнейшем проектировать сложные системы, создавать алгоритмы и программы.

По мнению Г.Х. Воистиновой и А.А. Тарасова [2, с. 195-201], олимпиадные задачи с помощью элементов дискретной математики решаются достаточно легко, что экономит большое количество времени на решение объемных и сложных задач.

Приведем рекомендации по подготовке школьников к олимпиадам:

1. Следует использовать комбинаторику для подсчета количества возможных вариантов. Например, если задача требует подсчета количества перестановок или сочетаний, то комбинаторика позволит сэкономить время на ее решение.

2. Используйте приемы теории графов. Графы могут быть полезны для представления объектов и связей между ними, что может помочь в понимании условия сложных задач.

3. Полезно пользоваться теорией чисел для выявления математических закономерностей и свойств чисел. Такой прием может помочь в решении задач, связанных с простыми числами, делимостью и т.д.

4. Следует использовать логическое мышление и алгоритмы для решения задач, связанных с логическими высказываниями, комбинаторными задачами и т.д. А также можно применить симметрию и взаимосвязь задач. Некоторые задачи можно решать, исходя из того, что они имеют схожий вид с другими, уже решенными задачами.

5. В решении задач может помочь индукция для доказательства формул и свойств. Это уместно при доказательстве теорем и формул, которые являются основой для решения некоторых задач.

6. Наконец, не стоит забывать о варианте «обратного решения». Иногда начать решение задачи с его требования (заключения), а затем пройти в обратную сторону, чтобы прийти к исходной задаче.

Приведем примеры нестандартных задач, при решении которых полезно знание элементов дискретной математики [3]:

Задача 1. Количество различных способов размещения 8 учеников по 4 в каждой группе.

Задача 2. Какое наименьшее количество цифр должно быть в числе, чтобы его произведение на 2 было полным квадратом?

Задача 3. Есть 7 красных, 5 синих и 3 зеленых шариков в корзине. Сколько различных комбинаций, чтобы вытащить 2 красных и 3 синих шарика?

Задача 4. Ученики в классе хотят выбрать свой лозунг по буквам. В классе 25 учеников, каждый из которых выбирает одну букву. Какое количество различных лозунгов может быть выбрано, если использовать все буквы алфавита?

Задача 5. Сколько существует разных парсеров для языка программирования, на котором написано 2000 строк кода? Каждый парсер может получить любой из 2000 возможных токенов.

Задача 6. Имеется 4 листочка бумаги, на каждом из которых написано одно из чисел от 1 до 4. Сколько существует различных расстановок листочков бумаги?

Задача 7. Какова вероятность выбрать две карты, которые образуют пару (например, две королевы), из стандартной колоды из 52 карт?

Задача 8. Сколько различных неубывающих 3-значных чисел можно получить из цифр {1, 2, 3, 4}?

Задача 9. Сколько есть способов для 8 человек сесть за круглый стол?

Задача 10. Какое наименьшее количество граней должно быть у выпуклого многогранника, чтобы его можно было разрезать на 20 тетраэдров?

Задача 11. Представьте, что вы занимаетесь разработкой компьютерной игры, в которой игроку нужно пройти лабиринт. Лабиринт задается в виде графа, где узлы - это перекрестки, а ребра - это дороги между перекрестками. Игрок находится в начальном узле, а цель - добраться до конечного узла. Но есть одна особенность: на каждом перекрестке игрок может выбрать только один путь, и он не может вернуться назад. Таким образом, задача игрока -

найти кратчайший путь до конечного узла. Как вы можете использовать алгоритм Дейкстры для решения этой задачи?

Задача 12. Рассмотрим граф, в котором каждое ребро имеет вес. Предположим, что мы выбрали некоторое подмножество ребер и хотим найти кратчайший путь между двумя заданными узлами, используя только ребра из этого подмножества. Как решить эту задачу?

Задача 13. Предположим, что у вас есть два графа, и вы хотите проверить, являются ли они изоморфными. Какой алгоритм вы можете использовать для решения этой задачи? Можно ли улучшить этот алгоритм, если известно, что графы являются регулярными?

Задача 14. Рассмотрим граф, в котором каждое ребро имеет вес. Предположим, что мы хотим найти путь между двумя заданными узлами, который проходит через ровно k ребер. Как решить эту задачу?

Задача 15. Рассмотрим граф, в котором каждое ребро имеет вес. Предположим, что мы хотим найти кратчайший путь, проходящий через заданный набор узлов. Как решить эту задачу?

Задача 16. Предположим, что у вас есть две кучки камней, содержащие суммарно 100 камней. Вы можете брать из каждой кучки любое количество камней (но не больше, чем есть в кучке). Какое минимальное количество операций вы должны сделать, чтобы обе кучки содержали одинаковое количество камней?

Задача 17. Предположим, что у вас есть волшебный квадрат 3 на 3, в котором каждое число от 1 до 9 встречается ровно один раз, и сумма чисел в каждой строке, каждом столбце и каждой диагонали равна 15. Какое минимальное количество чисел вы должны поменять местами, чтобы нарушить это свойство?

Задача 18. Предположим, что у вас есть бесконечный лист бумаги, на котором нарисованы две точки. Какое минимальное количество прямых вы должны провести, чтобы точки были разделены на две отдельные области?

Задача 19. Предположим, что у вас есть неограниченный запас монет достоинством 1, 2, 5, 10, 20 и 50 копеек. Какое минимальное количество монет вы должны использовать, чтобы набрать сумму в 99 копеек?

Задача 20. Предположим, что у вас есть две монеты, одна из которых выпадает орлом с вероятностью 1/3, а другая - с вероятностью 2/3. Выбирается случайная монета и подкидывается два раза. Если выпадает два орла, то выигрываете 1 рубль. Какую монету выбрать, чтобы максимизировать ваш шанс на выигрыш?

Задача 21. У какого наименьшего натурального числа сумма цифр равна 23?

Задача 22. В какой последовательности нужно расставить цифры от 1 до 9, чтобы получилось наибольшее число?

Задача 23. Есть 100 монет, среди которых только 1 фальшивая. Как за одно взвешивание на чашечных весах определить, где находится фальшивая монета?

Задача 24. Есть 3 ведра объемом 3, 5 и 8 литров. Как с помощью этих ведер получить 4 литра воды?

Задача 25. Есть шахматная доска 8х8 и 32 фишки. Можно ли покрыть все клетки доски фишками так, чтобы каждая фишка занимала только одну клетку и не было свободных клеток?

Задача 26. У трех друзей есть по 2 ключа. Как им обменяться ключами так, чтобы каждый оставил хотя бы 1 свой ключ, но никто не получил ни свой ключ, ни ключ другого друга?

Задача 27. Какое минимальное количество цифр нужно записать на доске, чтобы каждая из цифр от 0 до 9 встретилась хотя бы один раз?

Задача 28. Есть 7 золотых монет, одна из которых фальшивая и легче остальных. Как определить фальшивую монету за два взвешивания на чашечных весах?

Задача 29. В какой последовательности нужно перемножать числа от 1 до 10, чтобы получить наименьшее возможное произведение?

Задача 30. Есть 5 мешков с конфетами разного веса, но неизвестно, какой мешок весит меньше остальных. Как за 2 взвешивания на чашечных весах определить самый легкий мешок с конфетами?

Задача 31. Как расставить 8 матросов на 3 маленьких лодках без опрокидывания ни одной из лодок?

Задача 32. Можно ли разрезать квадрат на нечетное количество равных треугольников?

Задача 33. Есть 9 монет, одна из которых фальшивая - она легче на 1 грамм, чем настоящие. Как за две взвешивания на чашечных весах определить фальшивую монету?

Задача 34. На обочине дороги лежат два куска металла, один из которых стоит 40 рублей, а другой - 60. Однако, при обмене этих кусков между двумя людьми каждый получит то, что стоит меньше. Как это объяснить?

Задача 35. В бочке было 30 литров воды. Кто-то выпил из бочки 4 литра воды и затем добавил в бочку 5 литров воды. Сколько литров воды осталось в бочке?

Задача 36. Вероятность дождя на завтра - 50%. Вероятность того, что купальник забудут - 20%. Вероятность, что будет дождь и купальник забудут - 5%. Какова вероятность того, что будет дождь или купальник забудут?

Задача 37. В 7-местном автобусе ехали 7 человек. На следующей остановке вышло 4 человека, а на остановке после этого в автобус село 2 человека. Сколько человек осталось в автобусе?

Задача 38. Папа и сын вместе наблюдают на часы: "Сколько времени?" Сын отвечает: "10 минут назад было дважды столько, сколько будет через 25 минут." Который час на часах?

Таким образом, дискретная математика поможет школьникам развивать свои математические навыки и подготовиться к решению олимпиадных задач, а также будет полезным при изучении других школьных предметов, помогает ученикам лучше понимать мир вокруг себя, развивает умственные способности, а также может стать полезным при подготовке к вступительным экзаменам в университет. Дискретная математика – важный раздел для подготовки будущих математиков, программистов, инженеров и ученых. В целом, дискретная математика может быть использована для решения широкого спектра задач в различных областях, включая информатику, экономику, физику, биологию и т.д.

Библиографический список:

1. Белоусов А.В., Белоусова Е.А. Дискретная математика. Учебное пособие для старшеклассников и абитуриентов. – М.: Экзамен, 2009. – 301 с.
2. Воистинова Г.Х., Тарасов А.А. Комбинаторные задачи как средство формирования теоретического мышления // Математическое моделирование процессов и систем: Материалы XII Межд. молодежн. науч.-практ. конф. Часть 2, 17-19 ноября 2022 г., г. Стерлитамак / отв. ред. С.В. Викторов. – Стерлитамак: Стерлитамакский филиал УУНиТ, 2022. – С. 195-201.
3. Корн Г., Корн Т. Математический анализ и дискретная математика. М.: Мир, 2007.
4. Клименко С.В., Клименко Ю.С. Дискретная математика. Учебное пособие для студентов вузов. – М.: Лань, 2010. – 425 с.
5. Шевляков Г.Л., Шевлякова Н.Г. Дискретная математика для школьников и студентов. – М.: Физматлит, 2009. – 216 с.