УДК 519.863 **Информационные технологи**

Стрюков Павел Владимирович, *студент факультета экономики, управления и информационных технологий, ФГБОУ ВО «Ухтинский государственных технический университет», г. Ухта*

Герберт Денис Владимирович, *студент факультета экономики, управления и информационных технологий, ФГБОУ ВО «Ухтинский государственных технический университет», г. Ухта*

МАТЕМАТИКА В ПРИЛОЖЕНИИ ПО АВТОМАТИЗАЦИИ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ. УЧЁТ СТОХАСТИЧЕСКИХ ФАКТОРОВ

Аннотация: В современном мире, для эффективного достижения поставленной цели, часто приходится заниматься планированием. Чем оптимальнее план, тем больше шансов, что цель будет достигнута вовремя. В реальности, многие задачи содержат большое количество сложновзаимосвязанных этапов. В таких случаях для создания оптимального плана применяются различные методы календарного планирования. В виду существования чётких алгоритмов, данные методы целесообразно автоматизировать. В работе рассмотрена реализация PERT метода календарного планирования, в виде трансформации плана действий в сетевой взвешенный граф с фиктивными узлами, на языке Python с использованием библиотек numpy, pandas, matplotlib и т.п.

Ключевые слова: PERT, Python, календарное планирование, создание программы, вероятностные факторы.

Annotation: In the modern world, in order to effectively achieve the set goal, it is often necessary to engage in planning. The more optimal the plan, the more likely it is that the goal will be achieved in time. In reality, many tasks contain a large number of complex interrelated stages. In such cases, various calendar planning methods are used to create an optimal plan. In view of the existence of clear algorithms, it is advisable to automate these methods. The paper considers the implementation of the PERT method of calendar planning, in the form of transformation of an action plan into a network weighted graph with dummy nodes, in Python using numpy, pandas, matplotlib libraries, etc.

Keywords: PERT, Python, calendar planning, program creation, probabilistic factors.

Для постиндустриального общества характерна огромная роль информации в жизни человека. Для качественной обработки и структуризации получаемой информации, а также достижения поставленных целей и задач очень часто используют различные методы планирования [1]. Практика показывает, что такой подход действительно эффективен, однако, при повышении количества вводных данных, сложность построения оптимального плана растёт с высокой скоростью. В следствии этого, в математике появилось отдельное направление, называемое «календарным планированием». Его методы позволяют оптимизировать построенные планы, в том числе с учётом различных вероятностных факторов (например, неопределённость времени выполнения или затрат) [2].

Целью нашей исследовательской работы мы поставили демонстрацию математической составляющей автоматизации календарного планирования сетевыми методами с учётом вероятностных факторов, а также в условиях неполной ресурсной определённости.

В качестве основных задач нашей работы выступают: 1) исследование разнообразных сетевых методов, применяемых в календарном планировании; 2) демонстрация различий между планированием с учётом и без учёта вероятностных факторов; 3) практическое применение данных методов на примере реальной задачи планирования; 4) создание программного шаблона с целью создания возможности применения календарных методов оптимизации даже без глубокого понимания их математических оснований.

Метод Сетевого планирования и управления – СПУ (в англоязычной литературе PERT – Program Evaluation and Review Technique). Один из способов оптимизации, применяемый при организационном управлении программами [3]. Впервые был использован в США для календарного планирования работ по созданию научно-исследовательской ракеты «Поларис».

Основной идеей данного метода является отображение структурных зависимостей и взаимосвязей между операциями в виде сетевой модели на основе многослойного графа. При этом операции – это рёбра графа, а события – его узлы. При этом при построении модели необходимо выполнение следующих правил: 1) все операции, заложенные в плане, на сетевой модели отображаются как уникальные, единственные дуги; 2) каждому кортежу, состоящему из начального и конечного события, соответствует 1 и только 1 операция; 3) при включении каждой операции в сетевую модель для обеспечения правильного упорядочения необходимо дать ответы на следующие вопросы: А) какие операции необходимо завершить непосредственно перед началом рассматриваемой операции? Б) какие операции должны непосредственно следовать после завершения данной операции? В) какие операции могут быть выполнены одновременно с рассматриваемой операцией?

Для соблюдения вышеописанных правил часто требуется введение фиктивных узлов и операций (имеющих, очевидно, нулевую продолжительность). После построения сетевой модели производится её расчёт и оптимизация.

Обозначим Bp_i – ранний срок начала операции i. Примем $Bp_0 = 0$, тогда все последующие операции вычисляются по формуле: $Bp_i = \max\limits_{i:i \to j} \lfloor Bp_i + d_{ij} \rfloor$, где d_{ij} – продолжительность операции (i, j). Вычисление раннего срока называется прямым проходом. После этого выполняется обратный проход – вычисление поздних сроков окончания $-Sf_i$, при этом если $i = n$ причём $n-$ событие, которым программа завершается, то $Bp_i = Sf_i$. Тогда формула расчёта имеет общий вид $\underset{j:i \to j}{Sf_i = \min\lfloor Sf_j - d_{ij} \rfloor}$.

Далее рассчитывается критический путь (дуга, на которой $Bp_i = Sf_i$).

После этого вычисляется позднее начало $Bf_{ij} = Sf_j - d_{ij}$, раннее окончание $Sp_{ij} = Bp_i + d_{ij}$, а также полный и свободный резерв времени: $Af_{ij} = Bf_{ij} - Bp_i$; $Uf_{ij} = Bp_j - Bp_i - d_{ij}$. Затем для всех некритических дуг, начало и конец которых принадлежит критическому пути (у него коэффициент напряженности равен 1), вычисляется коэффициент напряжённости по формуле $K_н(i,j) = \frac{Bp_j - Bp_i}{Bp_j}$. Дуги, где $K_н(i,j) > 0{,}8$ – критическая зона; $K_н(i,j) < 0{,}6$ – зона резерва; $0{,}8 \ge K_н(i,j) \ge 0{,}6$ – подкритическая зона. Чем больше у дуги коэффициент напряженности, тем быстрее она может перейти на критический путь в случае изменений в сети (в плане).

Большой интерес представляют оптимизации планов с учётом различного количества работников на той или иной задаче. Именно для таких проектов изначально и разрабатывался PERT метод. Примем X_{ij} – количество работников, занятых на выполнении операции (i,j). Определим трудоёмкость работы (i,j), как $W_{ij} = d_{ij} \cdot X_{ij}$. Для оптимизации проекта часто бывает необходимо перевести часть работников с дуги, имеющей наименьший коэффициент напряженности, на критический путь. Эмпирически доказано, что продолжительность работы с наименьшей напряжённостью можно увеличить на $\frac{1}{2}UF_{ij}$, если она находится в зоне резерва, и на $\frac{1}{3}UF_{ij}$, если она принадлежит подкритической зоне. Этот параметр называют характеристикой перехода k_{ij}. Тогда количество исполнителей, которых можно перевести с работы (i,j) имеет вид $N = X_{ij} - \frac{W_{ij}}{d_{ij} + k_{ij} \cdot UF_{ij}}$. После перевода людей, для данных операций требуется пересчитать время выполнения $d_{ij} = \frac{W_{ij}}{X_{ij} \pm N}$. Затем производится перестроение сетевого графика и повторная оптимизация до тех пор, пока все работы, имеющие полный и свободный резерв времени, не окажутся в критической зоне.

Достаточно часто в задачах планирования возникают ситуации, когда нельзя точно установить длительность выполнения той или иной задачи. В этом случае время выполнения задаётся как $d_{ij} = \frac{d_{ij}^a + 4d_{ij}^b + d_{ij}^c}{6}$ – трёхпараметрическая модель, где d_{ij}^a – пессимистическая оценка длительности, d_{ij}^b – вероятная, d_{ij}^c – оптимистическая. Или же, если нет данных по наиболее вероятной продолжительности, используется двухпараметрическая модель – $d_{ij} = \frac{3d_{ij}^a + 2d_{ij}^c}{5}$. После этого производятся вычисления как в детерминированной модели. Затем идёт учет вероятностных характеристик. Дисперсии вычисляются по формуле $Var(d_{ij}) = \sigma^2(d_{ij}) = \left(\frac{d_{ij}^a - d_{ij}^c}{6}\right)^2$. Тогда среднеквадратичное отклонение критического пути имеет вид $\sigma_{cp} = \sqrt{\sum_{i=0}^{m} \sigma^2(z_i)}$ где $z_i \in Z, Z\{z_0, z_1, ..., z_m\}$, такое что $\forall z_i = d_{ij}$, если $Bp_i = Sf_i$. Исходя из теоремы Ляпунова (центральной предельной теоремы можно считать, что для достаточно крупных планов (а именно такие обычно и подвергаются оптимизации при помощи СПУ)) распределение случайной величины будет совпадать с нормальным распределением.

Зачастую, для многих проектов задаётся директивный срок их выполнения T_{pr}. Вероятность того, что время выполнения проекта уложится в заданный срок $P(Bp_n \le T_{pr}) = 0,5 + \Phi\left(\frac{T_{pr} - Bp_n^{ex}}{\sigma_{cp}}\right)$. Где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}} dt$ - функция Лапласа (нечётная, $\Phi(-x) = \Phi(x)$, если $x \ge 5$, то $\Phi(x) \approx 0,5$). Из правила трёх сигм можно определить интервал гарантированного времени выполнения проекта: $Bp_n^{ex} \pm 3\sigma_{cp}$. Так же, зная заданную надёжность γ, можно определить максимальный срок выполнения Bp_n^{γ}. Примем u_{γ} – доверительный коэффициент для заданной надёжности. Тогда $P(Bp_n \le Bp_n^{\gamma}) = 0,5 + \Phi\left(\frac{Bp_n^{\gamma} - Bp_n^{ex}}{\sigma_{cp}}\right) = 0,5 + \Phi(u_{\gamma})$, где

$Bp_n^{\gamma} - Bp_n^{ex} = u_{\gamma} \cdot \sigma_{cp}$, откуда $Bp_n^{\gamma} = Bp_n^{ex} + u_{\gamma} \cdot \sigma_{cp}$.

Стоит отметить, что наиболее эффективна оптимизация трёхпараметрической модели. Это связано с тем, что большое количество вероятностных характеристик даёт плану большую зависимость от перераспределения рабочей силы. В данной работе в качестве примера применения была рассмотрена оптимизация плана переоборудования ангара. С директивным сроком выполнения T_{pr} 30 дней и γ равной 80% (Рисунок 1). У изначального плана, согласно расчётам, были 2 операции находящиеся в резервной зоне (Рисунок 2). Это позволило провести ряд оптимизаций, в результате которых план стал выглядеть следующим образом (Рисунок 3). Как видно из графика, после перерасчёта, срок выполнения, соответствующий 80% надёжности сократился на 8 дней (Рисунок 4).

Название	Продолжительность	Следующие операции	пессимистическая	ожидаемая	отпимистическая	Работники
[написание ТЗ]	5.166666666666667	[создание чертежей] [выполнение заказа]	8	5	3	6
[разработка тех проекта]	8.333333333333334	[демонтаж]	10	9	4	7
[создание чертежей]	2.5	[ремонт ангара] [подготовка документации]	6	2	1	5
[ремонт ангара]	6.333333333333333	конец	9	7	1	4
[подготовка документации]	3.6666666666666665	[пробный пуск]	5	4	1	6
[пробный пуск]	1.1666666666666667	конец	2	1	1	4
[выполнение заказа]	2.1666666666666665	[ремонт ангара] [подготовка документации] [монтаж] [перекрестная проверка]	4	2	1	8
[монтаж]	6.166666666666667	[пробный пуск]	13	5	4	9
[перекрестная проверка]	2.8333333333333335	конец	8	2	1	4
[демонтаж]	9.166666666666666	[ремонт ангара] [подготовка документации] [монтаж] [перекрестная проверка]	17	8	6	6

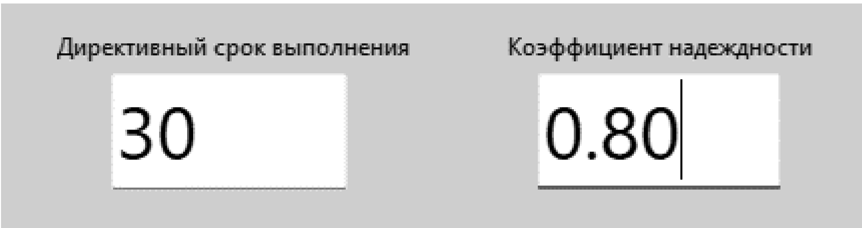

Рисунок 1 – Таблица исходных значений

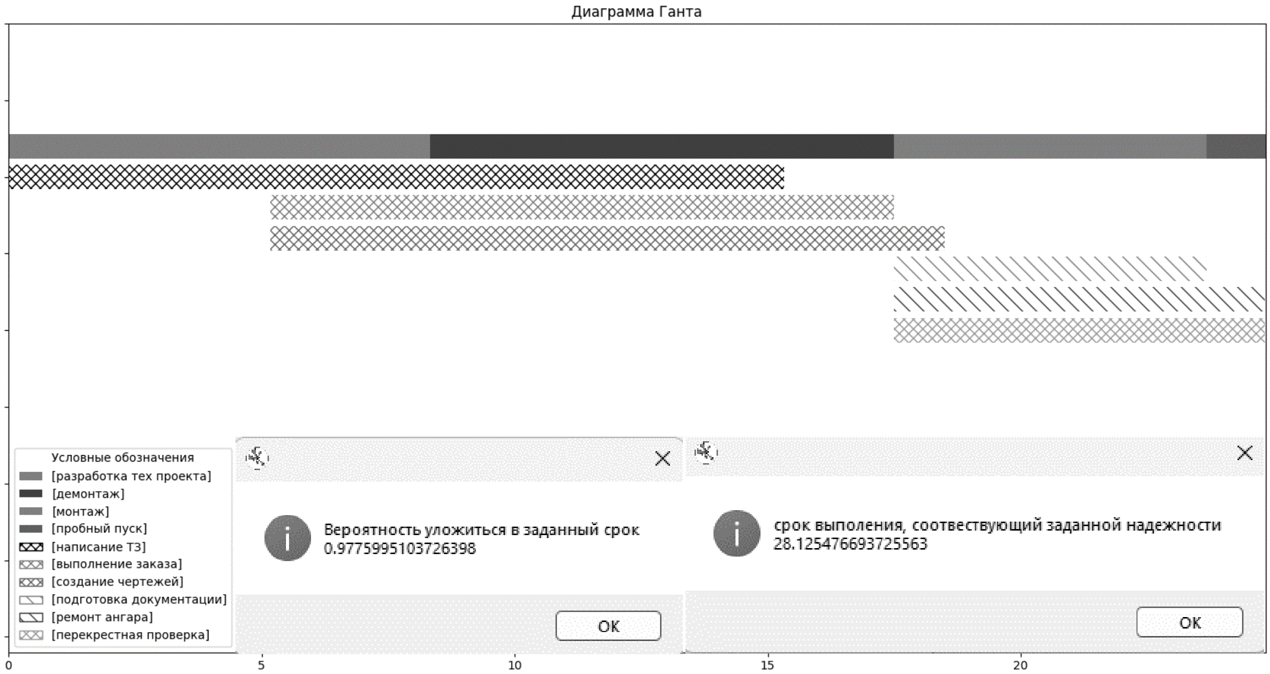

Рисунок 2 – Исходный график

Название	Продолжительность	Следующие операции	пессимистическая	ожидаемая	отпимистическая	Работники
[написание ТЗ]	5.166666666666667	[создание чертежей] [выполнение заказа]	8	5	3	6
[разработка тех проекта]	8.333333333333334	[демонтаж]	10	9	4	7
[создание чертежей]	2.5	[ремонт ангара] [подготовка документации]	6	2	1	5
[ремонт ангара]	6.333333333333333	конец	9	7	1	4
[подготовка документации]	4.915531335149864	[пробный пуск]	6.70299727520436	5.362397820163488	1.340599455040872	4.475609756097561
[пробный пуск]	1.1666666666666667	конец	2	1	1	4
[выполнение заказа]	2.1666666666666665	[ремонт ангара] [подготовка документации] [монтаж] [перекрестная проверка]	4	2	1	8
[монтаж]	4.917341977309563	[пробный пуск]	10.366288492706644	3.987034035656402	3.1896272285251217	10.524390243902438
[перекрестная проверка]	2.8333333333333335	конец	8	2	1	4
[демонтаж]	9.166666666666666	[ремонт ангара] [подготовка документации] [монтаж] [перекрестная проверка]	17	8	6	6

Рисунок 3 – Оптимизированная таблица

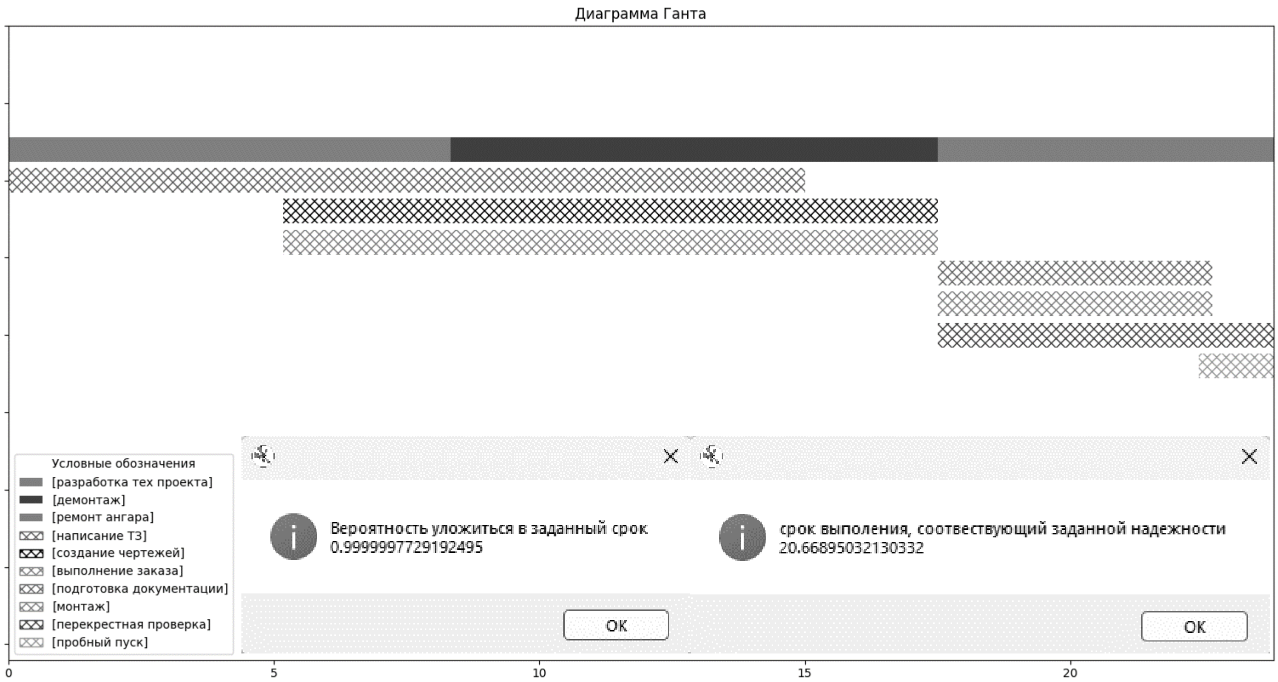

Рисунок 4 – Оптимизированный график

Исходя из результатов наших исследований можно сказать, что PERT метод календарного планирования имеет крайне широкий спектр возможного применения. С его помощью можно оптимизировать как обычные бытовые задачи, так и проекты, связанные с профессиональной деятельностью. Ввиду того, что ручной расчёт метода СПУ затруднителен, разработка программы на языке Python для автоматизации данного процесса была целесообразной. Также важно отметить, что наибольший эффект от оптимизации при помощи PERT метода можно достичь при работе с крупными проектами, время в которых задано в виде 2 или 3 вероятностных параметров.

Библиографический список:

1. Голенко Д.И. Статистические методы сетевого планирования и управления. – Москва: Наука, 1968. – 400 с. Текст: непосредственный.

2. Зенкин А.А. Методы и задачи сетевого планирования: учебное пособие/ А.А. Зенкин. – Москва: КНОРУС, 2021. – 206 с. Текст: непосредственный.

3. Плескунов, М.А. Задачи сетевого планирования: учебное пособие / М.А. Плескунов. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2014. – 92 с. Текст: непосредственный.